



С.В.Подлесний, В.Г.Федорченко  
В.М.Іскрицький, О.М.Стадник

**РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ**  
**З ДИСЦИПЛІНИ „ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА”**

**РОЗДІЛ „ДИНАМІКА”**

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Міністерство освіти і науки України  
Донбаська державна машинобудівна академія

С.В.Подлесний, В.Г.Федорченко  
В.М.Іскрицький, О.М.Стадник

**РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ**  
**З ДИСЦИПЛІНИ „ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА”**  
**РОЗДІЛ „ДИНАМІКА”**

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів вищих технічних учбових закладів

Краматорськ 2004

ББК 22.21

УДК 531

Р 64

Рецензенти:

В.А.Ропай, д.т.н., проф., Дніпропетровського національного гірничного університету, м. Дніпропетровськ

Ю.М.Внуков, д.т.н., проф., Запорізького національного технічного університету, м. Запоріжжя

Гриф надано Міністерством освіти і науки України

Лист № 14/18.2 – 1350 від 17.06.2004

С.В. Подлесний, В.Г. Федорченко, В.М. Іскрицький, О.М. Стадник.

Розв'язання задач з дисципліни "Теоретична механіка". Розд. "Динаміка". Навчальний посібник. – Краматорськ: ДДМА, 2004. – 192 с.

ISBN 5-7763-1295-7

Навчальний посібник містить короткі відомості з теорії, багато прикладів рішення задач за кожною темою і за 30 варіантами завдань для самостійної роботи за кожною темою.

Посібник розрахований як на викладачів, так і на студентів.

ISBN 5-7763-1295-7

ББК

© С.В.Подлесний,  
В.Г.Федорченко,  
В.М.Іскрицький,  
О.М.Стадник, 2005

© ДДМА, 2005

## Зміст

Вступ.....	5
1 ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ.....	6
1.1 Застосування основного рівняння динаміки для дослідження руху матеріальної точки.....	6
1.1.1 Розв'язання першої задачі динаміки точки.....	6
1.1.2 Розв'язання другої задачі динаміки точки.....	8
1.1.3 Прямолінійний і криволінійний рух точки під дією постійних та змінних сил.....	9
1.1.4 Прямолінійний коливальний рух матеріальної точки та особливості його дослідження.....	19
1.1.5 Раціональний вибір системи координат при розв'язанні задач.....	34
1.2 Динаміка складного руху матеріальної точки. Відносний рух.....	34
1.2.1 Динамічна теорема Коріоліса. Склад і розв'язання диференціальних рівнянь відносного руху матеріальної точки.....	35
1.2.2 Використання окремих випадків динамічної теореми Коріоліса при розв'язанні задач.....	39
1.3 Основні вигляди диференціальних рівнянь механіки і їх розв'язання.....	53
1.3.1 Випадок, коли сила залежить лише від часу.....	54
1.3.2 Випадок, коли сила залежить тільки від швидкості.....	56
1.3.3 Випадок, коли сила залежить тільки від положення точки.....	57
1.4 Фізичні й математичні аналогії при розв'язанні задач динаміки точки.....	62
1.5 Оптимальні рухи точки. Рух точки за найменший час або на найбільшу відстань.....	66
1.6 Індивідуальні завдання для самостійної роботи і контролю знань.....	70
1.6.1 Перша і друга задачі динаміки.....	70
1.6.2 Коливальний рух точки.....	74
2 ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ.....	79
2.1 Теорема про зміну кількості руху матеріальних об'єктів.....	79
2.1.1 Застосування теореми у загальному вигляді.....	79
2.1.2 Використання окремих випадків із теореми при розв'язанні задач. Закони збереження кількості руху.....	90

2.1.3 Застосування теорем в диференціальній формі.....	94
2.2 Теорема про рух центра мас. Наслідки теореми.....	101
2.3 Теорема про зміну кінетичного моменту матеріальних об'єктів.....	109
2.3.1 Застосування теореми у кінцевій (інтегральній) формі.....	110
2.3.2 Застосування теореми в диференціальній формі.....	113
2.3.3 Використання окремих випадків теореми. Закони збереження кінетичного моменту.....	120
2.3.4 Диференціальне рівняння обертання тіла навколо нерухомої осі.....	123
2.4 Теорема про зміну кінетичної енергії при дослідженні руху матеріальних об'єктів.....	128
2.4.1 Визначення кінетичної енергії точки і механічних систем.....	130
2.4.2 Визначення роботи сили і потужності.....	134
2.4.3 Застосування теореми про зміну кінетичної енергії при дослідженні руху матеріальних об'єктів.....	139
2.5 Значення загальних теорем і раціональний вибір вигляду загальної теореми при розв'язанні задач.....	149
2.6 Фізичні і математичні аналогії загальних теорем динаміки.....	152
2.6.1 Аналогії в поняттях і зв'язки між ними.....	152
2.6.2 Аналогії в постановці задач.....	153
2.6.3 Аналогії в діях.....	154
2.6.4 Аналогії в результатах.....	155
2.7 Індивідуальні завдання для самостійної роботи і контролю знань.....	155
2.7.1 Теорема про зміну кількості руху.....	155
2.7.2 Теорема про рух центра мас.....	164
2.7.3 Теорема про зміну кінетичного моменту.....	172
2.7.4 Теорема про зміну кінетичної енергії.....	181
Список використаної літератури.....	191

## Вступ

У роботі наведені методичні вказівки до розв'язання задач з двох розділів: “Динаміка точки”, “Загальні теореми динаміки”.

Короткі теоретичні відомості забезпечують поєднання теорії з практичними діями при розв'язанні задач, що сприяє більш творчому їх розумінню.

Розв'язання задач наведено на прикладах виконання із застосуванням різноманітних прийомів.

Показано, що одна і та ж задача може бути розв'язана різними методами відповідно плану розв'язання у залежності від методу, який визначається вибором теореми, рівняння, або принципу.

Проведений взаємозв'язок різних методів розв'язання задач і обґрунтований вибір найбільш раціональних методів у конкретних випадках.

У роботі приділено увагу аналогіям фізичного та математичного характеру, що створює передумови для глибокого розуміння студентом методики розв'язання різноманітних задач динаміки.

Розглянуті розділи теоретичної механіки закінчуються малими задачами для самостійних робіт, що дає змогу досить швидко визначити необхідні знання студентів і їх вміння розв'язувати різноманітні задачі класичної механіки.

# 1 ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

## 1.1 Застосування основного рівняння динаміки для дослідження руху матеріальної точки

### 1.1.1 Розв'язання першої задачі динаміки точки

Розв'язання першої задачі динаміки точки розглянемо на такому прикладі.

У вагоні (рис.1.1), який рухається у горизонтальній площині закругленим шляхом радіуса  $R$  зі швидкістю  $V$ , на пружині підвішений вантаж вагою  $P$ . Визначити величину і напрям сили, яка розтягує пружину.

#### Рішення

Згідно з основним рівнянням динаміки

$$m\bar{a} = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i. \quad (1.1)$$

Розглянемо розрахункову схему прикладу (рис. 1.1).

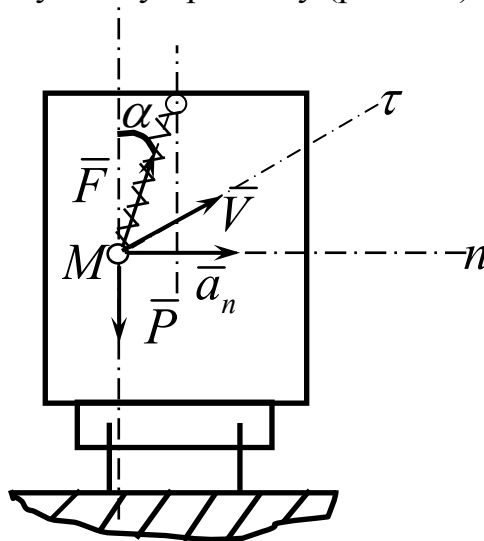


Рисунок 1.1

До центра ваги  $M$  вантажу прикладені сили:  $\bar{P}$  (вага) і  $\bar{F}$  (реакція пружини), які діють у вертикальній площині.

Зв'яжемо з рухомою точкою  $M$  натуральну систему координат, спрямувавши головну нормаль  $n$  горизонтально до центра закруглення, а бінормаль  $b$  – вертикально вниз. Дотична  $\tau$  до траєкторії спрямована перпендикулярно до площини рисунка.

Кут відхилення від вертикалі підвішеного на пружині тягаря позначимо через  $\alpha$ . На рисунку 1.1 показані також вектор швидкості –  $\bar{V}$ , вектор нормального прискорення –  $\bar{a}_n$ .

Основне рівняння динаміки (1.1), яке записане у векторній формі, необхідно записати у проєкціях на осі координат:

$$ma_\tau = \sum_{i=1}^N F_{i\tau}; \quad ma_n = \sum_{i=1}^N F_{in}; \quad ma_b = \sum_{i=1}^N F_{ib}. \quad (1.2)$$

У рівняннях (1.2) дотичне прискорення  $a_\tau = 0$ , нормальне прискорення  $a_n = V^2 / \rho$ , бінормальне прискорення  $a_b = 0$ .

Тоді залишаються рівняння проєкцій на головну нормаль і бінормаль:

$$m \frac{V^2}{\rho} = F \sin \alpha;$$

$$0 = F \cos \alpha - P.$$

Звідки, враховуючи, що  $P = mg$ , одержимо:

$$F \cos \alpha = P; \quad F \sin \alpha = \frac{P V^2}{g \rho}.$$

Отже,



$$F = P \sqrt{1 + \frac{V^4}{g^2 \rho^2}}; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{V^2}{g \rho}.$$

Хід рішення цієї задачі показує, що перша задача динаміки точки полягає у визначенні рівнодійної сил, які спричиняють заданий рух матеріальної точки з відомою масою. Залежно від форми, за якою задано закон руху, для визначення рівнодійної сил можна використати векторне рівняння руху, координатні рівняння або натуральні. В усіх випадках задача зводиться до визначення прискорення з відомих диференціальних рівнянь руху.

Спосіб розв'язання першої задачі такий: диференціюємо двічі задані рівняння руху, а потім за диференціальними рівняннями руху знаходимо проекції рівнодійної. Знаючи проекції рівнодійної на координатні осі, легко визначити модуль сили і косинуси кутів її з осями координат. Отже, за заданою масою точки і рівнянням її руху сила повністю визначається за величиною і напрямом.

Розглянутий приклад показує, що іноді прискорення точки можливо визначити без подвійного диференціювання рівнянь руху.

### 1.1.2 Розв'язання другої задачі динаміки точки

Друга задача динаміки полягає у визначенні закону руху або його кинематичних характеристик за відомими масою точки та діючими на точку силами.

Сили, що діють на точку, можуть залежити від її положення, швидкості або часу, тобто  $\bar{F} = \bar{F}(\bar{r}, \bar{V}, t)$ .

Початковими умовами руху є початковий момент часу  $t_0$ , початкове положення точки  $\bar{r}_0$  та її початкова швидкість  $\bar{V}_0$ .

У скалярній формі сила задається через її проекції як функції своїх аргументів: часу  $t$ , координат  $x, y, z$ , їх перших похідних  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  за ча-

сом; початкове положення точки – її координатами  $x_0, y_0, z_0$  в початковий момент часу  $t_0$ , а початкова швидкість – першими похідними  $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$  від координат за часом для моменту  $t_0$ .

Якщо першу задачу динаміки розв’язують диференціюванням рівнянь руху точки, то розв’язування другої задачі динаміки зводиться до інтегрування системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Принципи складання і рішення диференціальних рівнянь (1.3) розглянемо у наступних розділах на конкретних прикладах.

### 1.1.3 Прямолінійний і криволінійний рухи точки під дією постійних та змінних сил

Прямолінійний рух точки під дією постійних сил розглянемо на прикладі руху тіла по похилій площині.

На похилій площині, нахиленій до горизонталі під кутом  $\alpha$ , розташоване тіло (рис.1.2), яке підштовхнули з початковою швидкістю  $V_0$ . Визначити закон руху тіла  $x=f(t)$ , закон зміни швидкості  $V=f_1(t)$ , час  $T$  його руху до зупинки і пройдений шлях  $S$ . Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює  $f$ .

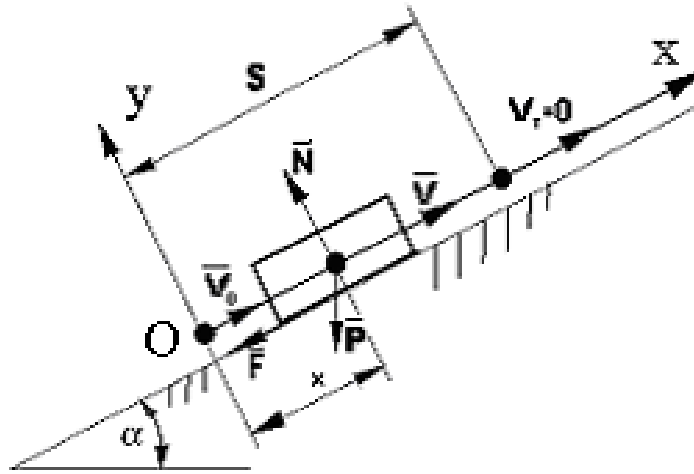


Рисунок 1.2

Направимо вісь  $Ox$  по похилій площині в напрямку руху тіла, а вісь  $Oy$  – перпендикулярно площині, вибравши за початок координат положення точки в момент початку руху, прийнявши в цей самий час  $t = 0$ . У довільний момент  $t$  часу прикладаємо до точки діючі на неї сили:  $\bar{P}$  – вага тіла,  $\bar{N}$  – нормальна реакція площини,  $F$  – сила тертя.

$$m\ddot{x} = -P\sin\alpha - F.$$

Враховуючи, що  $P = mg$ , а  $F = fN$ , одержимо

$$m\ddot{x} = -mg - fN. \quad (1.4)$$

Визначимо  $N$  за допомогою складання диференціального рівняння у проекції на вісь  $y$ :

$$m\ddot{y} = N - P\cos\alpha,$$

де  $\ddot{y} = 0$ , тому що вектор прискорення тіла знаходиться на осі  $x$ .

Таким чином,  $N = P \cos \alpha$ , або  $N = mg \cos \alpha$ . Звертаючись до рівняння (1.4) і скоротивши його на масу  $m$ , одержимо

$$\ddot{x} = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha). \quad (1.5)$$

Розв'яжемо диференціальне рівняння (1.5) за допомогою підстановок

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} \quad m a \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}. \quad (1.6)$$

Послідовно двічі інтегруючи рівняння (1.5), одержимо:

$$\dot{x} = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t + C_1; \quad (1.7)$$

$$x = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2, \quad (1.8)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  – сталі інтегрування, які знаходяться із початкових умов:

$$t_0 = 0; \dot{x} = \dot{x}_0 = V_0; x = x_0 = 0.$$

З урахуванням початкових умов рівняння (1.7, 1.8) матимуть вигляд:

$$\dot{x} = V_0 - g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t; \quad (1.9)$$

$$x = V_0 t - g(\sin \alpha + f \cos \alpha) t^2 / 2. \quad (1.10)$$

Рівняння (1.9) є законом зміни швидкості за часом. Підставивши в нього кінцеві умови  $t = T$ ,  $\dot{x} = 0$ , одержимо

$$T = V_0/g(\sin\alpha + f\cos\alpha). \quad (1.11)$$

Рівняння (1.10) визначає закон руху тіла за часом. Підставивши в нього кінцеві умови:  $t = T$ ;  $x = S$ , одержимо

$$S = T(V_0 - g(\sin\alpha + f\cos\alpha)T/2). \quad (1.12)$$

У рівнянні (1.12) час  $T$  визначається формулою (1.11).

Рішення другої задачі динаміки при дії на точку змінних сил практично мало чим відрізняється від розв'язання задач при дії постійних сил. Зрозуміємо це на такому прикладі.

Припустимо, що на тіло, рух якого уже розглядався, діє ще одна сила  $F(t)$ , напрям якої співпадає з напрямом руху, і модуль якої змінюється від часу за законом

$$F(t) = Bt,$$

де  $B$  – сталий коефіцієнт.

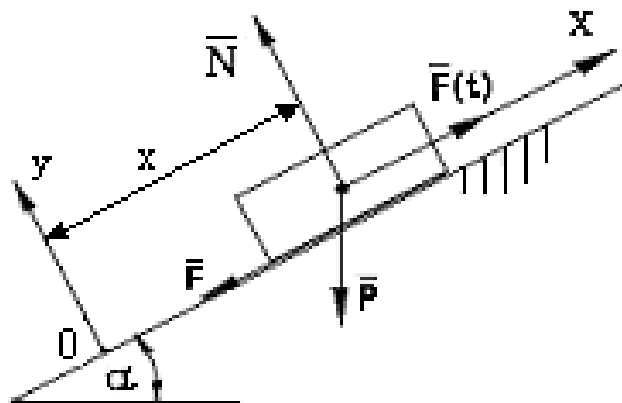


Рисунок 1.3

Розрахункова схема сил у цьому випадку зображена на рисунку 1.3. Диференціальне рівняння (1.5) буде мати вигляд

$$\ddot{x} = \frac{B}{m}t - g(\sin\alpha + f\cos\alpha). \quad (1.13)$$

Якщо зіставимо рівняння (1.5) і (1.13), то прийдемо до висновку, що рішення цих рівнянь мало чим відрізняються методично. Труднощі можливі тільки з боку інтегрування складних функцій часу.

У прикладах, які розглянуто раніше, точка рухалась прямолінійно. Розглянемо приклад, коли точка здійснює криволінійний рух.

Криволінійний рух точки на площині описується двома диференціальними рівняннями основного закону динаміки в проекціях на осі, а в загальному випадку руху точки у просторі – системою трьох диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння криволінійного руху інтегруються порівняно просто, коли кожне із цих рівнянь інтегрується незалежно від інших.

Розглянемо приклад криволінійного руху точки, коли матеріальна точка масою  $m$  кинута з поверхні Землі зі швидкістю  $V_0$  під кутом  $\alpha$  до горизонту в вертикальній площині. Треба знайти рівняння руху точки, нехтуючи опором повітря.

### *Рішення*

Вибираємо систему координат. Вісь  $X$  горизонтальна, вісь  $Y$  напрямлена вертикально вгору.

Початок координат вибираємо в тій точці, в якій була точка  $M$  у початковий момент часу. Довільне положення точки позначимо координатами  $X$  і  $Y$ , які з часом змінюються. Розглянемо сили, що діють на точку при довільному положенні на траєкторії. З умови задачі випливає, що єдиною силою, прикладеною до точки, є сила ваги (рис. 1.4)

$$P = mg.$$

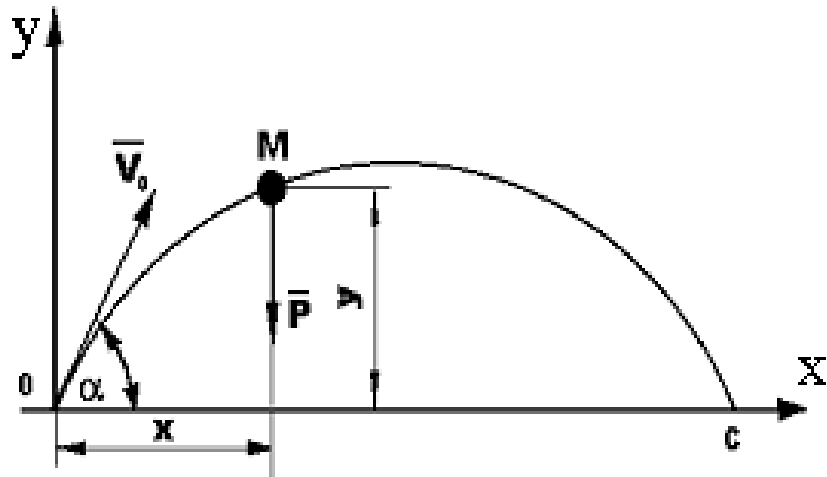


Рисунок 1.4

Складемо диференціальні рівняння руху точки:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0; \\ m\ddot{y} &= -mg. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Інтегруємо рівняння руху:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C_1; \\ \dot{y} &= C_2 - gt. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Ці співвідношення є першими інтегралами диференціальних рівнянь руху. Другі інтеграли матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} x &= C_1 t + C_3; \\ y &= -gt^2/2 + C_2 t + C_4. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Для визначення сталих інтегрування запишемо початкові умови. Будемо відлічувати час з моменту початку руху. На підставі умов задачі маємо

$$t_0 = 0; x_0 = 0; y_0 = 0; \dot{x}_0 = V_0 \cos \alpha; \dot{y}_0 = V_0 \sin \alpha.$$

Підставимо початкові умови у перші та другі інтеграли:

$$C_1 = V_0 \cos \alpha; C_2 = V_0 \sin \alpha; C_3 = C_4 = 0.$$

А знайдені сталі інтегрування – у перші та другі інтеграли і встановимо закон руху точки  $M$  :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} = V_x = V_0 \cos \alpha; \dot{y} = V_y = V_0 \sin \alpha - gt; \\ x = V_0 t \cos \alpha; y = V_0 t \sin \alpha - gt^2 / 2. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Щоб визначити рівняння траєкторії руху точки, виключимо з рівнянь руху параметр  $t$ . Одержимо

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - gx^2 / 2V_0^2 \cos^2 \alpha. \quad (1.18)$$

Отже, точка  $M$ , кинута під кутом до горизонту, рухається в безповітряному просторі за параболою.

Визначимо горизонтальну дальність польоту матеріальної точки, тобто відстань  $OC$ . Для цього покладемо в рівнянні руху точки  $y = 0$ , маємо

$$x(\operatorname{tg} \alpha - gx / 2V_0^2 \cos^2 \alpha) = 0, \quad (1.19)$$

звідки

$$x_1 = 0; x_2 = 2V_0^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha / g = V_0^2 \sin 2\alpha / g. \quad (1.20)$$



Перший розв'язок дає точку  $O$ , другий – точку  $C$ . Отже

$$OC = V_0^2 \sin 2\alpha / g. \quad (1.21)$$

Із цієї формули видно, що така сама дальність може бути отримана при куті  $\beta = 90^\circ - \alpha$ . Отже, при даній початковій швидкості  $V_0$  в одну й ту саму точку  $C$  можна потрапити двома траекторіями; настильною ( $\alpha < 45^\circ$ ) і навісною ( $\beta = 90^\circ - \alpha > 45^\circ$ ).

При заданій початковій швидкості  $V_0$  найбільша горизонтальна дальність у безповітряному просторі буде, коли  $\sin 2\alpha = 1$ , тобто при куті  $\alpha = 45^\circ$ .

Висота траекторії

$$H = V_0^2 \sin^2 \alpha / 2g, \quad (1.22)$$

час польоту

$$T = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g}. \quad (1.23)$$

Отримані результати практично можна використовувати для орієнтованого визначення характеристик польоту снарядів дальністю порядку 200...600 км, оскільки при цих дальностях снаряд основну частину свого шляху проходить у стратосфері, де опір повітря незначний. При менших дальностях на результат буде значно впливати опір повітря, а при дальностях, більших 600 км, силу ваги уже не можна вважати сталою.

Урахуємо опір повітря точки, кинуті під кутом з поверхні Землі. Розрахункова схема у цьому разі має вигляд, зображений на рис. 1.5, де  $\bar{V}$  –

вектор швидкості точки у довільному її положенні, а  $\bar{R}$  – вектор сили опору повітря, рівний

$$\bar{R} = -km\bar{V},$$

де  $k$  – є коефіцієнт опору повітря. Згідно з основним законом динаміки:

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{R}.$$

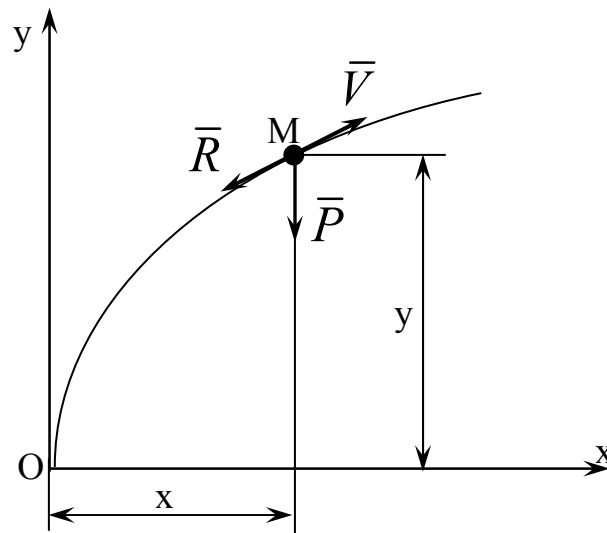


Рисунок 1.5

У проекції на вісь  $x$  це рівняння має вигляд

$$m\dot{x} = -km\dot{x}. \quad (1.24)$$

Використовуючи підстановку  $\ddot{x} = d\dot{x}/dt$ , після інтегрування маємо

$$\ln\dot{x} = -kt + \ln C_1, \quad (1.25)$$

відкіля  $\dot{x} = C_1 e^{-kt}$ .

При  $t = 0$  маємо  $C_1 = V_0 \cos \alpha$ ,

тоді  $\dot{x} = V_0 \cos \alpha e^{-kt}$ .

Використовуючи підстановку  $\dot{x} = dx / dt$ , після інтегрування маємо

$$x = -V_0 \frac{\cos \alpha}{k} e^{-kt} + C_2. \quad (1.26)$$

За початковими умовами:  $t=0; x=x_0=0$ , маємо

$$C_2 = V_0 \cos \alpha / k.$$

Тоді закон руху точки має вигляд

$$x = \frac{V_0 \cos \alpha}{k} (1 - e^{-kt}). \quad (1.27)$$

Пошук рівняння руху точки вздовж осі  $Y$  проводиться аналогічними діями. Інколи діюча сила не є функцією часу, а є функцією координати точки.

У цьому випадку використовують підстановку:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx}.$$

Розв'язання таких задач не відрізняється напрямком дій від попередніх розглянутих прикладів.

#### 1.1.4 Прямолінійний коливальний рух матеріальної точки та особливості його дослідження

Механічні рухи, які періодично повторюються, називаються механічними коливаннями. Коливання – один із найбільш поширених видів руху, що часто зустрічається в природі та техніці.

Колівальний рух точки відбувається під дією поновлюючої сили, яка з'являється при відхиленні точки від положення рівноваги і яка намагається повернути точку в це положення. Природа цих сил різноманітна: це і пружна сила – сила деформованої пружини, і архімедова виштовхуюча сила, яка протидіє зануренню тіла в рідину і таке інше.

Поновлююча сила завжди напрямлена до положення рівноваги точки, а її величина залежить від відстані точки до положення рівноваги, тобто

$$F = c(x + \lambda_{cm}), \quad (1.28)$$

де  $c$  – коефіцієнт жорсткості ;

$x$  – відстань до положення рівноваги;

$\lambda_{cm}$  – статичне відхилення точки від початку координат (відстань від початку координати до положення рівноваги).

Окрім поновлюючої сили на точку одночасно може діяти постійна сила (наприклад, сила ваги), сила опору руху, яка залежить від швидкості точки і напрямлена протилежно швидкості точки та збурююча сила, тобто сила, задана функцією часу.

У залежності від комбінації вказаних сил розрізняють такі види коливального руху:

- 1 Вільні гармонійні коливання, що відбуваються відповідно під дією поновлюючої сили.
- 2 Вільні затухаючі коливання що відбуваються під дією поновлюючої сили і сили опору руху.
- 3 Вимушені коливання без опору, які відбуваються під дією поновлюючої сили і сили періодичного характеру - збурюючої сили.
- 4 Вимушені коливання при наявності опору, що відбуваються під дією

поновлюючої сили, сили опору руху та збудуючої сили.

На рис. 1.6, 1.7, 1.8, 1.9 показані розрахункові схеми для складання диференціальних рівнянь відповідно чотирьом видам коливального руху точки. Складання диференціальних рівнянь руху проводиться аналогічно тому, як це виконувалось, у випадку неперіодичного руху.

Особливість полягає в тому, що початок відрахунку осі координат вибирають у стані статичної рівноваги точки.

Складання диференціальних рівнянь коливального руху точки проводять аналогічно тому, як це виконували у раніше розглянутих випадках неперіодичного руху точки.

Випадок 1. Вільні гармонійні коливання.

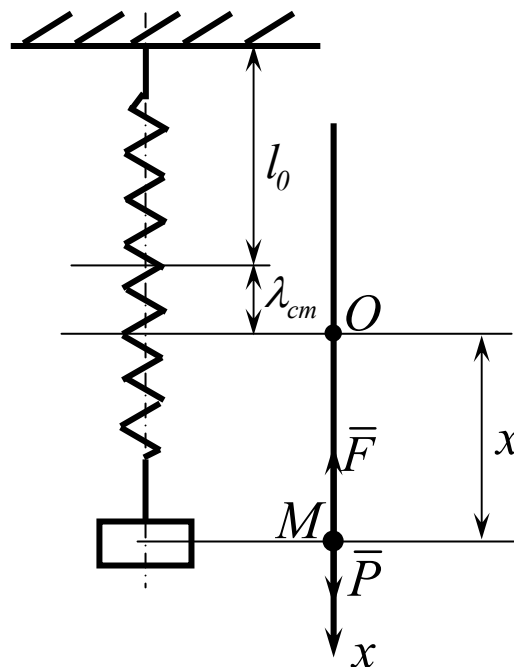


Рисунок 1.6

Нехай (рис.1.6)  $l_0$  – довжина недеформованої пружини з жорсткістю  $C$ , до якої підвішено вантаж масою  $m$ ,  $\lambda_{cm} = \frac{P}{C}$  – величина статичної деформації пружини,  $O$  – положення рівноваги вантажу, де і вибрано початок відліку осі  $Ox$ , направленої вертикально вниз.

У довільному положенні  $M$  на вантаж діють сила ваги  $\bar{P}$  та відновлююча сила  $\bar{F}$ .

Складемо диференціальне рівняння руху вантажу:

$$m\ddot{x} = mg - c(x + \lambda_{cm}). \quad (1.29)$$

Так як у стані рівноваги сила ваги зрівноважується силою пружності

$$mg = c\lambda_{cm},$$

то отримаємо:

$$\dot{x} + k^2 x = 0, \quad (1.30)$$

де  $k$  – циклічна (кругова) частота, яка визначається залежністю

$$k = \sqrt{c/m}.$$

Тут  $C$  – коефіцієнт пружності,  $m$  – маса точки.

Рішення цього диференціального рівняння має вигляд:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (1.31)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  – сталі інтегрування.

Випадок 2. Вільні коливання з урахуванням сили опору.

Сила  $\bar{R}$  опору руху (рис. 1.7) пропорційна швидкості і напрямлена протилежно до неї, тобто

$$\bar{R} = -\mu \bar{V}, \quad (1.32)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт опору.

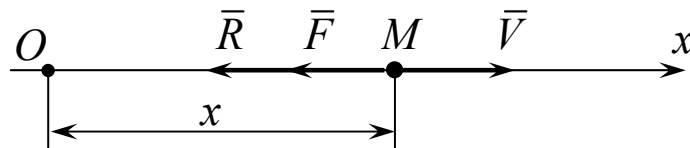


Рисунок 1.7

Диференціальне рівняння руху точки після деяких перетворень стане таким:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0, \quad (1.33)$$

де  $n = \mu/2m$  – коефіцієнт затухання.

Існують три випадки розв'язання диференціального рівняння вільних коливань з урахуванням сил опору:

1  $n < k$  – малий опір руху (затухаючі коливання).

#### *Рішення*

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t), \text{ де } k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}, \quad (1.34)$$

$$\text{або } x = A e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha). \quad (1.35)$$

Величини  $C_1, C_2, A, \alpha$  є сталими інтегрування і визначаються за початковими умовами.

2  $n = k$  – критичний опір руху (неколивальний затухаючий або аперіодичний рух).

#### *Рішення*

$$x = e^{-nt} (C_1 t + C_2). \quad (1.36)$$

3  $n > k$  – великий опір руху (неколивальний затухаючий або аперіодичний рух).

### Рішення

$$x = e^{-nt} (C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{-k_2 t}), \quad (1.37)$$

де  $k_2 = \sqrt{n^2 - k^2}$

Випадок 3. Вимушені коливання без опору.

У найпростішому, але практично дуже важливому випадку, збурююча сила змінюється за гармонійним законом:

$$Q(t) = Q_0 \sin(pt + \delta), \quad (1.38)$$

де  $Q_0$  – амплітуда,

$p$  – частота,

$\delta$  – початкова фаза збурюючої сили.

Складемо диференціальне рівняння руху точки у цьому випадку на підставі схеми, показаної на рис. 1.8.

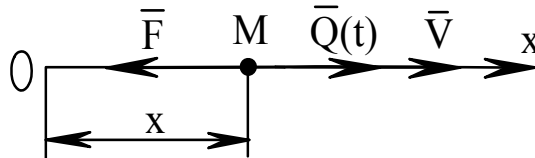


Рисунок 1.8

Після перетворень одержимо:

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin(pt + \delta), \quad (1.39)$$

де  $k^2 = c/m$ ,  $h = Q_0/m$ .

Існують три випадки розв'язання диференціального рівняння третього виду коливань:



1  $p < k$  – низькочастотне збурення.

*Рішення*

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (1.40)$$

2  $p = k$  – критичний випадок (явище резонансу).

*Рішення*

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{2k} t \sin\left(pt + \delta - \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.41)$$

3  $p > k$  – високочастотне збурення.

*Рішення*

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{p^2 - k^2} \sin(pt + \delta - \pi). \quad (1.42)$$

Випадок 4. Вимушені коливання з урахуванням опору.

Диференціальне рівняння таких коливань (рис.1.9):

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h \sin(pt + \delta). \quad (1.43)$$

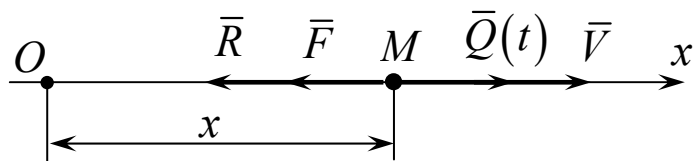


Рисунок 1.9

### Рішення

$$x = x_1 + A \sin(pt + \delta - \varepsilon), \quad (1.44)$$

де 
$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}, \quad (1.45)$$

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}. \quad (1.46)$$

Рішення  $x_1$  диференціального рівняння четвертого виду коливань залежить від співвідношення  $n$  і  $k$ , про що йшла мова раніше.

Співвідношення  $Z = p/k$  називається коефіцієнтом розстроювання.

У загальному випадку модуль амплітуди вимушених коливань:

$$A = \frac{h}{|k^2 - p^2|} = \frac{h}{k^2 |1 - Z^2|} = \frac{\lambda_{ст}}{|1 - Z^2|}, \quad (1.47)$$

де  $\frac{h}{k^2} = \frac{Q}{c} = \lambda_{ст}$  – статичне відхилення точки від положення

рівноваги при дії сили  $Q_0$ , яка дорівнює максимальному значенню збурюючої сили.

Коефіцієнтом динамічності  $\eta$  називається величина, яка показує в скільки разів амплітуда вимушених коливань перевищує статичне відхилення точки від положення рівноваги.

Коефіцієнт  $\eta$  характеризує динамічну сприйнятливість системи:

$$\eta = \frac{A}{\lambda_{cm}} = \frac{1}{|1 - Z^2|}. \quad (1.48)$$

Наведені раніше диференціальні рівняння і їх розв'язання для чотирьох видів коливань точки показують, що для остаточного рішення задач необхідно визначити наступні дані:

- 1  $C$  – жорсткість пружнього елемента або їх системи (еквіваленту жорсткості);
- 2  $n$  – коефіцієнт затування;
- 3  $x_0$  – початкова координата точки;
- 4  $V_0 = \dot{x}_0$  – початкову швидкість точки.

Якщо точка пов'язана не з одним, а з декількома пружними елементами (пружинами), то їх замінюють одним пружним елементом з жорсткістю, еквівалентною заданим пружним елементам. Пошук еквівалентної жорсткості залежить від форми зв'язку точки з пружними елементами.

Розглядають послідовне, паралельне і змішане з'єднання пружних елементів.

Типові схеми з'єднання пружних елементів та значення їх еквівалентної жорсткості наведені відповідно на рис. 1.10, 1.11, 1.12, де  $C$  – еквівалентна жорсткість,  $C_1, C_2, C_3$  – жорсткості пружних елементів.

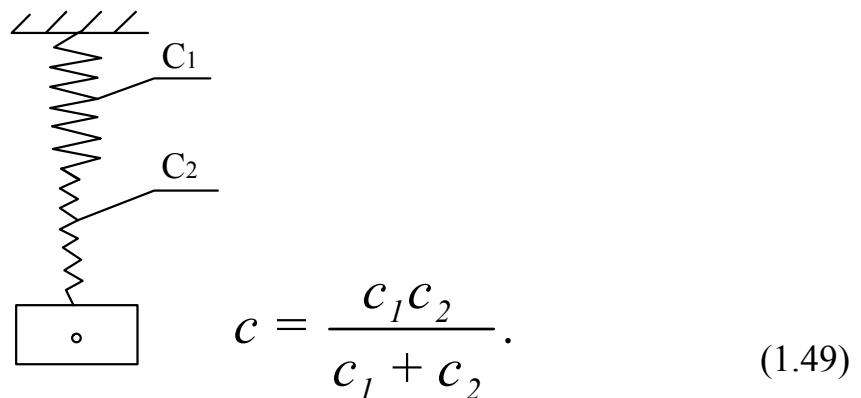


Рисунок 1.10

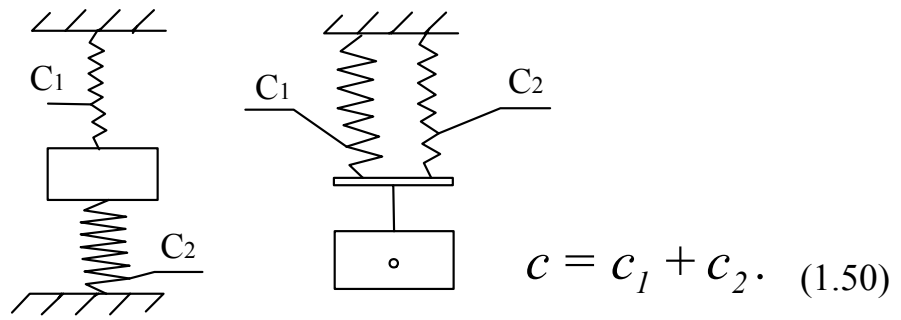


Рисунок 1.11

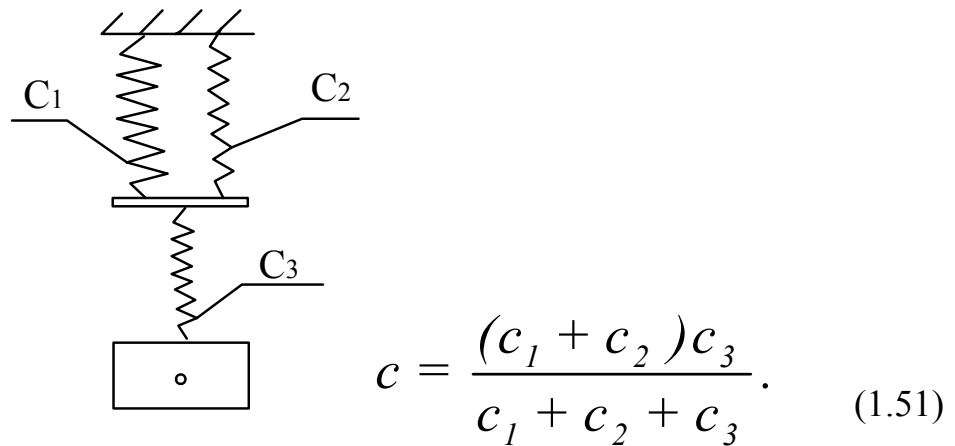


Рисунок 1.12

Початкові умови коливального руху точки не обов'язково задані безпосередньо, у деяких випадках вони визначаються додатково із умов задачі.

Розглянемо найбільш характерні приклади визначення початкових умов.

Якщо до вертикальної пружини з коефіцієнтом жорсткості  $C$  підвішені два тіла (рис.1.13), маси яких  $m_1$  і  $m_2$ , то статичні деформації від сили ваги кожного тіла відповідно будуть:

$$\lambda_{1cm} = \frac{m_1 g}{c}, \quad \lambda_{2cm} = \frac{m_2 g}{c}.$$

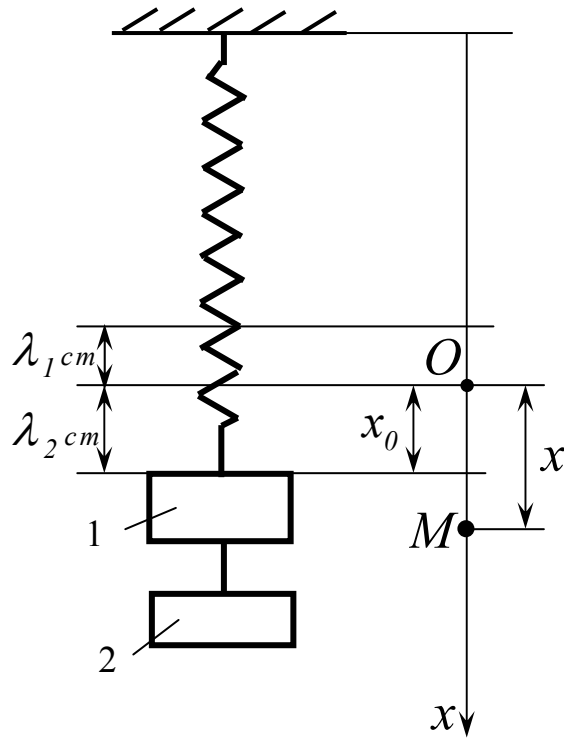


Рисунок 1.13

Розглядаючи рух тіла 1, після відокремлення тіла 2, необхідно вибрати початок осі координат  $Ox$  в положенні сигматичної рівноваги тіла 1. Початкова координата цього тіла буде:

$$x_0 = \lambda_2 \text{ cm}.$$

У іншому прикладі тіло, маса якого  $m$ , ковзає по гладкій похилій площині (рис.1.14) і, набираючи швидкість  $V_0$ , зчіплюється з пружиною, коефіцієнт жорсткості якої дорівнює  $C$ . У цьому випадку початок осі  $Ox$  знаходиться в положенні статичної рівноваги, коли  $\lambda_{cm} = mgs \sin \alpha / c$ . Коливальний рух тіла починають розглядати з моменту його зустрічі з пружиною, тому початкова координата  $x_0 = \lambda_{cm}$ , а початкова швидкість  $V_0 = \sqrt{2gS \cdot \sin \alpha}$  визначається за допомогою основного рівняння динаміки після переміщення тіла по похилій площині на відстань  $S$ .

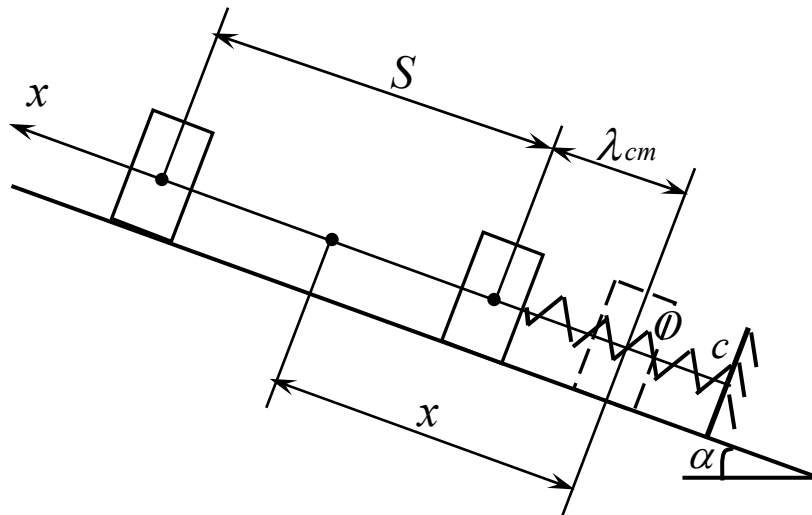


Рисунок 1.14

Дослідження коливального руху точки проводиться з метою визначення її закону руху та параметрів коливання: частоти, періоду, амплітуди, декрименту коливань або коефіцієнту динамічності.

Усі ці дані можливо одержати без складання силових розрахункових схем, бо усі види коливань мають відомі диференціальні рівняння та їх розв'язання, а параметри коливань визначаються відповідними відомими формулами.

Розглянемо такий приклад. Два тіла 1 і 2 масами  $m_1, m_2$  лежать на гладенькій площині, нахиленій під кутом  $\alpha$  до горизонту й опираються на пружину, коефіцієнт жорсткості якої  $C$  (рис.1.15).

У деякий момент часу  $t = 0$  тіло 2 знімають; одночасно ( $t = 0$ ) нижній кінець пружини  $A$  починає рухатись вздовж нахиленої площини за законом  $\xi = b \cdot \sin pt$ . Визначити рівняння руху тіла 1.

### Рішення

Спрямуємо вісь  $Ox$  вгору вздовж похилої площини (в напрямі руху тіла 1 після зняття тіла 2). Початок осі розмістимо в положенні спокою тіла 1, яке відповідає статичній деформації пружини, за умови, що точка  $A$  займає своє середнє положення ( $\xi = 0$ ).

Рух тіла визначається відповідно до основного рівняння динаміки у

координатній системі:

$$m_1 \ddot{x} = \Sigma F_{ix},$$

де  $\Sigma F_{ix}$  – сума проєкцій на вісь  $x$  сил, які діють на тіло 1 (рис.1.15,

а):

$\bar{P}_1$  – ваги тіла,  $\bar{N}$  – нормальної реакції площини,  $\bar{F}$  – поновлююча сила.

Таким чином

$$m_1 \ddot{x} = -P_1 \sin \alpha - F. \quad (1.52)$$

Тут

$$F = C(x - \lambda_{cm} - \xi). \quad (1.53)$$

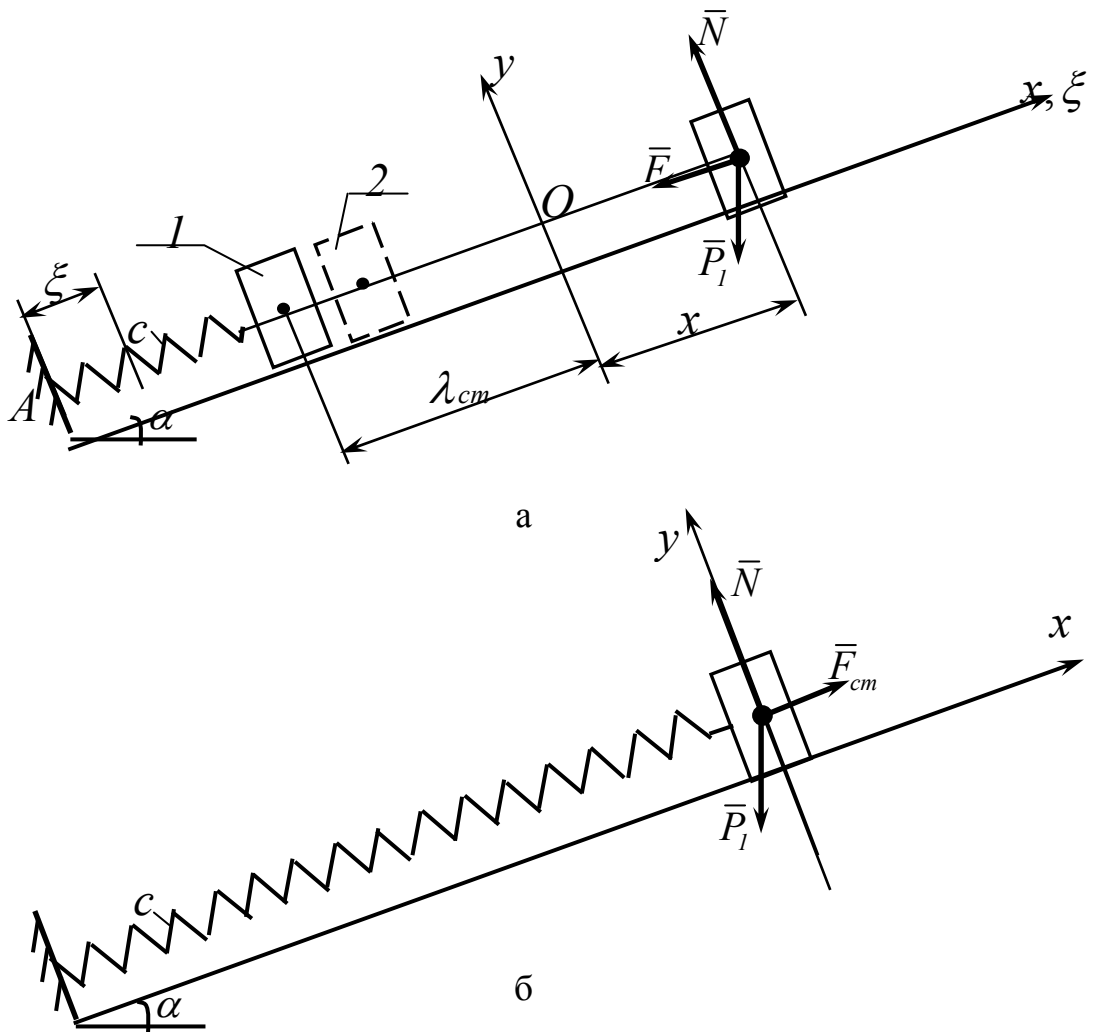


Рисунок 1.15

Статичну деформацію пружини  $\lambda_{1cm}$  знаходимо із рівняння відповідно до стану спокою тіла 1 на нахиленій площині (рис.1.15, б):

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -P_1 \sin \alpha + F_{cm} = 0,$$

тобто 
$$-P_1 \sin \alpha + c \lambda_{1cm} = 0,$$

відкіля 
$$\lambda_{1cm} = P_1 \sin \alpha / c.$$

Диференціальне рівняння руху тіла 1 набуде вигляду:

$$m_1 \ddot{x} = P_1 \sin \alpha - c(x - \lambda_{1cm} - y),$$

або після перетворення:

$$m_1 \ddot{x} + cx = cb \sin pt.$$

Поділивши усі члени рівняння на  $m_1$  і ввівши позначення:

$$c/m_1 = k^2, \quad cb/m_1 = h,$$

зведемо диференціальне рівняння до остаточного вигляду:

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt. \tag{1.54}$$

Це диференціальне рівняння відповідає третьому виду коливань і уже відоме.

Тобто його можна записати зразу, визначивши тільки  $k$  і  $h$ .



Рішення цього диференціального рівняння розподіляється на три випадки у залежності від співвідносин частот  $k$  і  $p$ .

Розглянемо, наприклад, випадок коли  $p < k$ .

Тоді розв'язання диференціального рівняння, як уже відомо, набуде вигляду

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta), \quad (1.55)$$

де  $\delta$  – із умов даної задачі дорівнює нулю.

Для визначення сталих інтегрування  $C_1, C_2$ , знайдемо, крім того, ще й рівняння для  $\dot{x}$

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos pt. \quad (1.56)$$

Запишемо початкові умови:

$$t = 0, \quad x_0 = -\lambda_{2cm} = -P_2 \sin \alpha / c, \quad \dot{x}_0 = 0.$$

За допомогою двох рівнянь: (1.55), (1.56) та початкових умов  $x_0, \dot{x}_0 = V_0$  визначаються сталі інтегрування  $C_1, C_2$ .

Необхідно визначити, що збудені коливальні рухи розподіляються на силові та кінематичні. У випадку силового збудення коливальний рух точки виникає від збудюючої сили:

$$Q(t) = Q_0 \sin(pt + \delta).$$

У випадку кінематичного збудення коливальний рух точки виникає

від коливання кінця пружини з протилежної від матеріальної точки сторони.

Закон кінематичного збурення виглядає так:

$$\xi(t) = b \sin(pt + \delta).$$

Тоді відносна амплітуда збурюючої сили для двох випадків визначається послідовно формулами:

$$h = Q/m, \quad h = bc/m.$$

Для розв'язання задач коливального руху точки можна рекомендувати наступний план дій:

- 1 Визначити вид коливального руху з урахуванням співвідношення  $k$  і  $n$  або  $k$  і  $p$ .
- 2 Записати закон руху точки ( $x = f(t)$ ) відповідно до визначеного виду коливань.
- 3 Визначити необхідні параметри коливального руху точки ( $k, n, h$ ).
- 4 Знайти першу похідну ( $\dot{x} = f'(t)$ ) від функції закону руху  $x = f(t)$ .
- 5 Визначити початкові умови руху точки, якщо вони не задані безпосередньо умовами задачі.
- 6 Визначити сталі інтегрування, використовуючи функції  $x = f(t), \dot{x} = f'(t)$  і початкові умови;
- 7 Записати закон руху точки  $x = f(t)$  у кінцевому вигляді.

### 1.1.5 Раціональний вибір системи координат при розв'язанні задач

Вибір системи координат при розв'язанні задач теоретичної механіки має велике значення. Раціональний вибір системи координат спрощує розв'язання задач.

Якщо траєкторія руху точки відома із умов задачі, то ці умови необхідно використовувати.

Так, коли точка здійснює прямолінійний рух, то вісь координат направляють вздовж її траєкторії у напрямку її руху.

При заданій траєкторії криволінійного руху точки рішення задачі легше виконувати за допомогою натуральних координат, записуючи основне рівняння динаміки в проекціях на нормаль, дотичну й бінормаль.

Підтверження цим рекомендаціям можна знайти, звертаючись до тих прикладів розв'язання задач, які уже розглянуті у цьому розділі. Якщо спробувати вирішувати конкретну задачу не в тій системі координат, яка використовується у прикладі, то виникають додаткові ускладнення її розв'язання.

## 1.2 Динаміка складного руху матеріальної точки. Відносний рух

Основою динаміки абсолютного руху матеріальної точки є другий закон Ньютона. Математичний запис цього закону складає суть основного закону динаміки або основне її рівняння.

Це рівняння використовувалось раніше, коли прискорення точки було абсолютним.

Як відомо, геліоцентричну систему можна вважати практично інерціальною, а рухи, віднесені до неї, практично абсолютними.

Рухи відносно Землі, наприклад, не завжди проявляють себе як абсолютні. Так, рух штучного супутника Землі, політ балістичного снаряду, рух маятника Фуко – практично абсолютні відносно геліоцентричної системи, але не відносно Землі.

Аналогічні приклади мають місце, коли окремі тіла машин і механізмів мають рух відносно інших рухомих тіл.

Для розв'язання таких задач, коли точка здійснює рух відносно неінерціальної системи координат використовують основний закон руху матеріальної точки відносно до неінерціальної системи координат або динамічну теорему Коріоліса.

### 1.2.1 Динамічна теорема Коріоліса. Склад і розв'язання диференціальних рівнянь відносного руху матеріальної точки

Векторна форма динамічної теореми Коріоліса має такий вигляд:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k, \quad (1.57)$$

де  $\bar{F}$  – векторна сума сил, прикладених до точки;

$\bar{\Phi}_e$  – сила інерції переносного руху;

$\bar{\Phi}_k$  – сила інерції Коріоліса.

Одержимо диференціальні рівняння відносного руху точки в координатній формі:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \Phi_{ex} + \Phi_{kx}; \\ m\ddot{y} &= F_y + \Phi_{ey} + \Phi_{ky}; \\ m\ddot{z} &= F_z + \Phi_{ez} + \Phi_{kz}. \end{aligned} \right\} \quad (1.58)$$

Аналізуючи основні диференціальні рівняння відносного руху точки у векторній та координатних формах, приходимо до висновку: диференціальні рівняння динаміки відносного руху складаються так само, як і в інерціальних системах, тільки до безпосередньо прикладених до точки сил

приєднуються ще сили інерції – переносна і Коріолісова.

Отже, всі наслідки, отримані з основних законів динаміки, справедливі і для відносного руху, якщо окрім реальних сил, які діють на точку, врахувати ще й сили інерції.

Упровадження сил інерції приводить до зручного формулювання основних законів механіки у відносному русі, надає їм наочний характер, завдяки чому ці закони мають широке використання.

Наведені раніше рівняння (1.56), (1.57) слід розглядати, як основу певної методики вивчення відносного руху, його фіктивним зведенням до абсолютного руху. Мета запровадження сил  $\bar{\Phi}_e, \bar{\Phi}_k$  – перетворити неінерціальну систему координат в інерціальну.

Розглянемо методичні особливості розв’язання задач відносного руху точки на такому прикладі (рис.1.16).

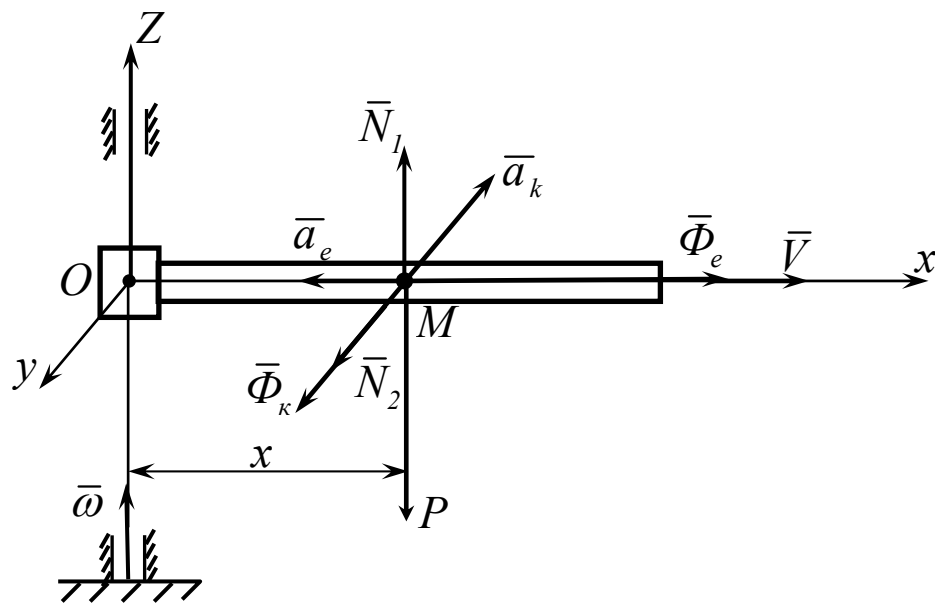


Рисунок 1.16

Гладка горизонтальна прямолінійна трубка довжиною  $L$ , обертається з сталою кутовою швидкістю  $\omega$  навколо вертикальної осі. У цій трубці знаходиться кулька  $M$  масою  $m$ . У початковий момент відстань кульки від осі обертання дорівнює  $x_0$ , а її швидкість відносно трубки  $\dot{x}_0 = V_0 = 0$ .

Визначити закон  $x = f(t)$  відносного руху кульки вздовж трубки, та

проміжок часу  $T$ , через який кулька вилетить з трубки довжиною  $L$ .

### Рішення

Розглянемо довільне положення кульки  $M$ , яке відмічено поточною координатою  $x$ . На неї діє сила ваги  $\bar{P}$ , і реакції  $\bar{N}_1, \bar{N}_2$  трубки напрямлені перпендикулярно до її поверхні.

Сили інерції  $\bar{\Phi}_e, \bar{\Phi}_k$  напрямлені протилежно їх прискоренням  $\bar{a}_e, \bar{a}_k$ .

Складемо диференціальні рівняння руху кульки у проекціях на рухому вісь  $Ox$ , напрямлену вздовж трубки:

$$m\ddot{x} = \Phi_e, \quad \text{де} \quad \Phi_e = m\omega^2 x,$$

отже диференціальні рівняння відносного руху кульки має вигляд

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x, \quad \ddot{x} - \omega^2 x = 0.$$

Загальний інтеграл диференціального лінійного рівняння другого порядку

$$x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}.$$

Сталі інтегрування  $C_1, C_2$  визначаємо з початкових умов: при  $t = 0; x = x_0; \dot{x}_0 = V_0 = 0$ .

Візьмемо похідну

$$\dot{x} = C_1 \omega e^{\omega t} - C_2 \omega e^{-\omega t},$$

тоді одержимо  $C_1 = C_2 = x_0/2$ ;

Закон руху кульки вздовж трубки визначається рівнянням

$$x = 0,5x_0(e^{\omega t} + e^{-\omega t}),$$

У момент часу  $t = T$  кулька залишає трубку.

У цей момент  $x = L$ . Цей момент визначимо із співвідношення

$$L = 0,5x_0(e^{\omega T} + e^{-\omega T}).$$

Після помноження на  $e^{\omega T}$  одержимо

$$Le^{\omega T} = 0,5x_0(e^{2\omega T} + 1),$$

відкіля

$$e^{2\omega T} - 2\frac{L}{x_0}e^{\omega T} + 1 = 0,$$

припустимо

$$e^{\omega T} = Z, \quad \text{а} \quad \frac{L}{x_0} = B,$$

після чого маємо

$$Z^2 - 2BZ + 1 = 0,$$

відкіля

$$Z_{1,2} = B \pm \sqrt{B^2 - 1}.$$

Тоді  $Z = Z_1 = B + \sqrt{B^2 - 1}$ , бо значення  $Z_2$  – від'ємне. Враховуючи, що  $\omega T = \ln Z$ , одержимо

$$T = \ln Z / \omega = \frac{1}{\omega} \ln \left| \frac{L}{x_0} \right|.$$

### 1.2.2 Використання окремих випадків динамічної теореми Коріоліса при розв'язанні задач

Окремі випадки динамічної теореми мають велике значення, бо вони допомагають зрозуміти і описати математично фізичні явища у природі та техніці.

Розглянемо перший частковий випадок, коли кутова швидкість  $\omega$  переносного руху дорівнює нулю. Якщо це так, то відповідно і сила Коріоліса  $\bar{\Phi}_k$  теж буде дорівнювати нулю. Тоді теорема Коріоліса набуде вигляду:

$$m \bar{a}_r = \bar{F} + \bar{\Phi}_e.$$

Застосуємо цей частковий запис теореми у такому прикладі.

Тіло 1 розміщене на боковій похилій площині тіла 2, яке здійснює поступальний рух з прискоренням  $\bar{a}_e$  (рис.1.17). При цьому, тіло 1 здійснює відносний рух вгору по нахиленій площині з початковою швидкістю  $\bar{V}_0$ . Кут нахилу площини  $\alpha$ . Коефіцієнт тертя ковзання  $f$ . Визначити закони зміни відносної швидкості й руху тіла 1, час відносного руху  $T$ , відносний шлях  $S$ , а також умови сталої відносної швидкості або відносного спокою тіла.



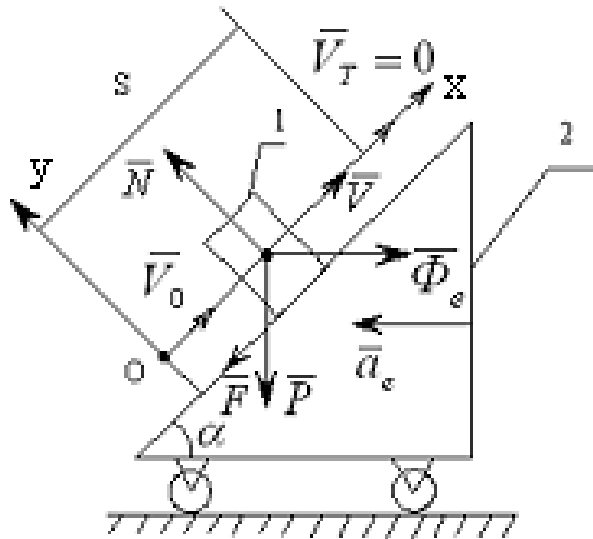


Рисунок 1.17

Запишемо послідовно формули розв'язання цієї задачі. Корисно порівнювати хід виконання прикладу та його результати з прикладом руху тіла вздовж нерухомої похилої поверхні, звертаючись до рис. 1.2 і до відповідних формул:

$$m\ddot{x} = -P\sin\alpha - fN + \Phi_e\cos\alpha;$$

$$N = P\cos\alpha, \Phi_e = ma_e, P = mg.$$

Тоді

$$\ddot{x} = a_e\cos\alpha - g(\sin\alpha + f\cos\alpha);$$

$$\dot{x} = (a_e\cos\alpha - g(\sin\alpha + f\cos\alpha))t + C_1;$$

$$x = (a_e\cos\alpha - g(\sin\alpha + f\cos\alpha))\frac{t^2}{2} + C_1t + C_2,$$

при  $t = 0; \dot{x} = \dot{x}_0 = V_0; x = x_0 = 0,$

тоді  $C_1 = V_0, C_2 = 0,$

$$\dot{x} = V_0 + a_e \cos \alpha \cdot t - g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t;$$

$$x = V_0 t + a_e \cos \alpha \frac{t^2}{2} - g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \frac{t^2}{2}.$$

Використовуючи кінцеві умови:  $t = T$ ;  $V = V_T = 0$ ;  $x = S$ , знаходимо:

$$T = \frac{V_0}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha) - a_e \cos \alpha},$$

$$S = V_0 T + a_e \cos \alpha \cdot T^2 / 2 - g(\sin \alpha + f \cos \alpha) T^2 / 2.$$

Швидкість відносного руху тіла 1 не буде змінюватись, коли

$$a_e \cos \alpha t - g(\sin \alpha + f \cos \alpha) t = 0,$$

тобто коли переносне прискорення

$$a_e = g(\sin \alpha + f \cos \alpha) / \cos \alpha.$$

При такому прискоренні може бути також і відносний спокій тіла 1 при умові що  $\bar{V}_0 = 0$ .

Коли

$$a_e > g(\sin \alpha + f \cos \alpha) / \cos \alpha,$$

тіло 1 буде рухатись угору і без початкової швидкості.

Якщо кут  $\alpha$  буде дорівнювати 0, то

$$a_e = gf,$$

це є випадок стану відносного спокою тіла на горизонтальній площині.

Розглянемо ще й випадок невагомості тіла за допомогою розрахункової схеми, зображеної на рис. 1.18.

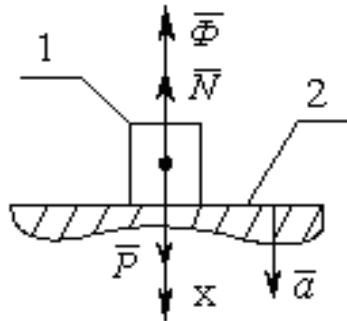


Рисунок 1.18

Тіло 1 знаходиться на поверхні тіла 2, яке здійснює рух вертикально вниз з прискоренням  $\bar{a}$ . Тіло 1 стане невагомим, коли реакція зв'язку  $\bar{N}$  буде дорівнювати нулю.

Тоді

$$P = \Phi, \text{ або } mg = ma, \text{ відкіля } g = a.$$

Відчуття стану невагомості можливо досягти у кабіні ліфта, якщо він буде опускатись з прискоренням земного тяжіння. Це використовують для тренування космонавтів у літаках, які пікірують вертикально з прискоренням земного тяжіння.

Розглянемо зміст тлумачення ваги  $P$  і прискорення земного тяжіння  $g$ . Відповідна розрахункова схема наведена на рисунку 1.19, де матеріальна точка  $M$  знаходиться в стані спокою на поверхні Землі, яка обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю  $\omega$

Наявність прискорення  $\bar{a}_e$  призводить до того, що вага  $\bar{P}$  матеріальної точки  $M$ , змінюється дією відцентрової сили інерції  $\bar{\Phi}_e$ . Вага тіла  $\bar{P}$ , яка дорівнює реакції опори  $\bar{N}$ , не буде дорівнювати силі тяжіння

$\bar{F}$ . Із умови відносної рівноваги, вираховуючи, що  $\bar{P} = -\bar{N}$ , маємо

$$\bar{P} = \bar{F} + \bar{\Phi}_e.$$

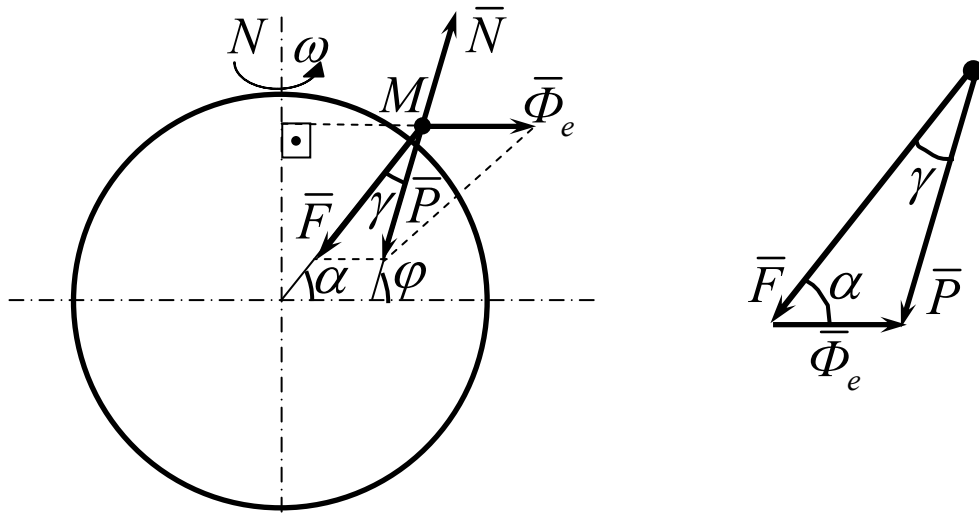


Рисунок 1.19

Таким чином, вага тіла являє собою рівнодійну гравітаційної сили і сили інерції переносного руху. Напрямок цієї рівнодійної визначає кут  $\varphi$  перпендикулярної лінії з площиною земного екватора, тобто географічну широту. Кут  $\alpha$  радіуса Землі з тією самою площиною представляє геоцентричну широту.

На екваторі сила тяжіння  $\bar{F}$  і відцентрова сила  $\bar{\Phi}_e$  напрямлені за однією лінією в протилежні боки. При цьому

$$\Phi_e = m\omega^2 R,$$

де  $R$  – радіус земної кулі, і набуде найбільшого значення.

Отже, вага тіла на екваторі найменша і становить

$$P = F - m\omega^2 R.$$

На полюсі відцентрова сила дорівнює нулю і сила тяжіння виступає як вага тіла.

Визначимо відхилення істинної вертикалі від радіуса Землі, тобто кут  $\gamma = \varphi - \alpha$ .

Сила інерції переносного руху

$$\Phi_e = m\omega^2 R \cos\alpha.$$

Сила тяжіння Землі

$$F = mg_0,$$

де  $m$  – маса точки,

$g_0$  – прискорення, яке викликає сила тяжіння Землі.

Із силового векторного трикутника (див. рис. 1.19, праворуч) за теоремою синусів маємо:

$$\frac{\Phi_e}{\sin(\varphi - \alpha)} = \frac{F}{\sin\varphi}.$$

Підставляючи значення сил  $\Phi_e$  та  $F$ , одержимо:

$$\sin(\varphi - \alpha) = \frac{\omega^2 R}{g_0} \cos\alpha \cdot \sin\alpha.$$

Враховуючи, що  $\sin(\varphi - \alpha) = \sin\varphi \cos\alpha - \cos\varphi \sin\alpha$ , після певних перетворень одержимо:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left( 1 - \frac{\omega^2 R}{g_0} \right) \operatorname{tg}\varphi.$$

Підрахунки дозволяють встановити, що

$$\frac{\omega^2 R}{g_0} = \left( \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \right)^2 \cdot \frac{6370 \cdot 10^3}{9,82} \approx 0,00346 \ll 1,$$

тому можна наближено покласти

$$\sin(\varphi - \alpha) \approx \varphi - \alpha \approx \frac{\omega^2 R \sin 2\alpha}{2g_0}.$$

Звідки випливає, що напрям істинної вертикалі збігається з радіусом Землі тільки на полюсі, де  $\alpha = \pi/2$  і на екваторі, де  $\alpha = 0$ .

Найбільше відхилення на широті  $\alpha = 45^\circ$  і дорівнює  $(\varphi - \alpha) = 0^\circ 6'$ . Це величина мала і в більшості технічних задач може не братися до уваги.

Проектуючи всі сили на напрям істинної вертикалі, знайдемо:

$$P = F \cos \gamma - \Phi_e \cos(\alpha + \gamma).$$

Нехтуючи малою величиною  $\gamma$  в порівнянні з геоцентричною широтою  $\alpha$ , одержимо:

$$P = F - \Phi_e \cos \alpha = F \left( 1 - \frac{\omega^2 R}{g_0} \cos^2 \alpha \right),$$

З цієї залежності випливає, що гравітаційна сила  $\bar{F}$  більша в усіх точках Землі за силу ваги, за винятком полюсів, де вони рівні.

Максимальне відхилення спостерігається на екваторі. Вага на екваторі

$$P_e = F\left(1 - \frac{R\omega^2}{g_0}\right) \approx \left(1 - \frac{1}{220}\right)F.$$

Вага тіла на екваторі менша гравітаційної сили лише на 0,3%. Якби Земля оберталася в 17 разів швидше, то тіла на екваторі ваги б не мали.

Таким чином, якщо зважити ракету на полюсі та її вага буде 1000 кА, а якщо запускати її в космічний простір з екватора, то її вага відносно ваги на полюсі зменшиться на 3 кА. Це не так мало.

Із різності проєкцій на напрям вертикалі можна отримати залежність між прискоренням, викликаним гравітаційною силою, і прискоренням, спотвореним переносною силою інерції

$$mg = mg_0 - m\omega^2 R \cos\alpha,$$

або

$$g = g_0 - \omega^2 R \cos\alpha.$$

На практиці користуються середнім значенням

$$g = 9,81 \text{ м/с}^2.$$

Прискорення вільного падіння тіла дорівнює 9,83 м/с<sup>2</sup> на полюсі і 9,78 м/с<sup>2</sup> на екваторі.

Проведені дослідження впливу обертання Землі на рівновагу й рух тіл показують, що в більшості інженерних розрахунків при вивченні руху тіл систему осей, зв'язаних з Землею, можна вважати інерціальною і при складанні рівнянь рівноваги за відношенням Землі ніяких поправок вводити не потрібно, оскільки переносна сила інерції враховується при зважуванні тіл.

Вивчимо тепер вплив обертання Землі на рух тіла по її поверхні за допомогою розрахункової схеми, наведеної на рис.1.20.

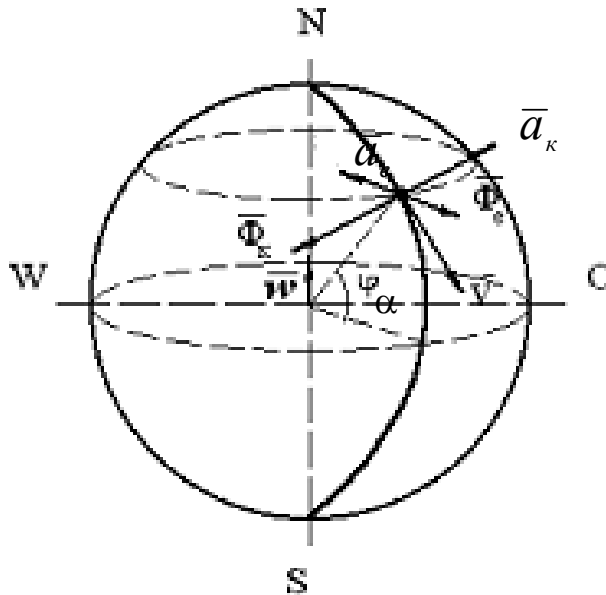


Рисунок 1.20

Під час руху точки по поверхні Землі обертання Землі навколо власної осі породжує переносне  $\bar{a}_e$  і коріолісове –  $\bar{a}_k$  прискорення, а отже, і відповідні сили інерції  $\bar{\Phi}_e$  і  $\bar{\Phi}_k$ . Повний оберт навколо своєї осі Земля робить приблизно за 24 години. Точніше за 23 години 56 хвилин і 4 секунди.

Тому кутова швидкість обертання Землі:

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60^2} c^{-1} = 0,0000729 c^{-1}$$

Доцентрове переносне прискорення

$$a_e = R\omega^2 \cos\varphi$$

Найбільше доцентрове прискорення спостерігається на екваторі, тобто при  $\varphi = 0$ . Припускаючи

$$R = 6370 \text{ км,}$$

для екватора маємо



$$a_e = R\omega^2 = 0,035 \text{ м/с}^2.$$

На полюсі  $a_e = 0$ , оскільки  $\cos\alpha = 0$ .

Прискорення Коріоліса

$$\bar{a}_k = 2\bar{\omega} \cdot \bar{V}_r,$$

де  $\bar{V}_r = \bar{V}$  – відносна швидкість точки.

Величина  $a_k = 2\omega V \sin\alpha$  за невеликих відносних швидкостей буде також величиною малою.

Наприклад, при  $V = 600$  м/с і широті  $\alpha = 60^\circ$

$$a_k = 0,075 \text{ м/с}^2.$$

Для порівняння – швидкість артилерійського снаряда  $V = 700$  м/с.

Під час руху точки з півночі на південь вздовж меридіана в північній півкулі коріолісове прискорення напрямлено на схід, а сила інерції Коріоліса – на захід.

Під час руху з півдня на північ прискорення Коріоліса напрямлене на захід, а сила інерції  $\bar{\Phi}_k$  – на схід.

В обох випадках прискорення Коріоліса напрямлене вліво від напрямку відносного руху, а сила інерції – вправо.

Під час руху точки вздовж паралеллі на схід або на захід сила інерції напрямлена вздовж радіусу паралеллі.

Вертикальна її складова буде змінювати вагу точки, а горизонтальна складова буде відхиляти точку вправо від напрямку руху.

Сила інерції  $\bar{\Phi}_k$  відсутня тільки в двох випадках: коли точка знахо-

диться в стані спокою відносно Землі, або коли вона рухається паралельно осі Землі, тобто коли  $\vec{\omega} \parallel \vec{V}$ .

Хоча в більшості випадків силою інерції Коріоліса можна знехтувати, проте зустрічаються явища, коли вона проявляє себе помітно. Врахування впливу сили інерції Коріоліса має практичне значення за дуже значних відносних швидкостей (політ ракет) або при вивченні рухів, які продовжуються дуже довго (рух води в річці тощо). Коріолісова сила інерції може викликати відхилення ракет від цілі, розмивання правого берега рік у північній півкулі й лівого берега рік у південній півкулі. Це явище називається законом Бера. Сила Коріоліса в розглянутому випадку буде величиною малою внаслідок малості відносної швидкості й переносної кутової швидкості, але тривала дія призводить до помітних результатів. Наявністю коріолісової сили інерції пояснюється швидке зношування на двохколійних залізницях правої колії в північній півкулі й лівої в південній півкулі, а також обертання площини коливань маятника Фуко відносно Землі.

Такий дослід уперше здійснив у 1851 р. французький фізик Фуко, який підвисив під куполом пантеону в Парижі маятник довжиною 67 м з вантажем на кінці, який важив приблизно 300 Н. Довжина дуги, яку описував вантаж, була 6 м, а період коливання – 16 с. Вже через кілька хвилин після пуску маятника площина його коливань помітно відхилялась у бік, протилежний напрямку обертання Землі.

Маятник Фуко підтверджує добове обертання Землі навколо своєї осі.

Вивчимо тепер рух матеріальної точки маси  $m$ , яка падає без початкової швидкості на Землю з висоти  $H$  (рис.1.21). Опором повітря знехтуємо. Висоту  $H$  будемо вважати малою порівняно з радіусом Землі. Тому силу тяжіння можна вважати величиною сталою.

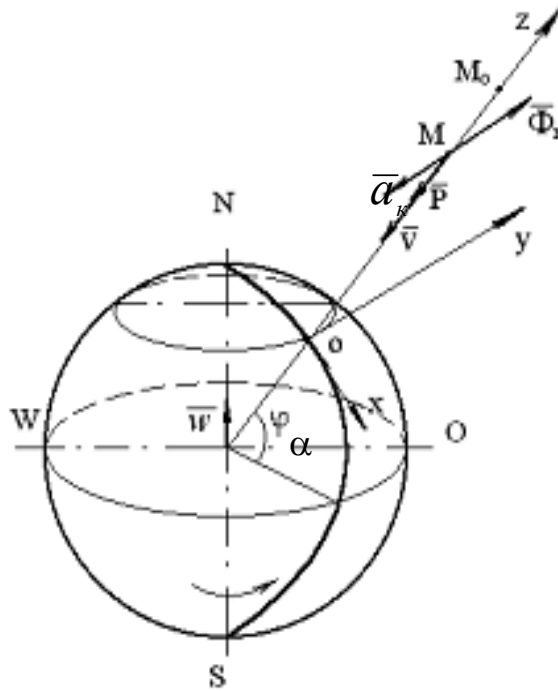


Рисунок 1.21

При розв'язанні цього прикладу скористуємось розрахунковою схемою, наведеною на рис.1.21. За рухому систему координат вибираємо систему, в якій вісь  $Oz$  напрямлена вздовж від центра Землі та проходить через початкове положення точки  $M_0$ , вісь  $Ox$  – по дотичній до меридіана з півночі на південь, а вісь  $Oy$  – по дотичній до паралелі із заходу на схід. Тут ми нехтуємо незначним відхиленням істинної вертикалі від вибраного напрямку осі  $Oz$ . Викликана цим неточність мала, як це впливає із результатів попередніх задач.

Складемо диференціальне рівняння відносного руху точки

$$m\bar{a}_r = \bar{P} + \bar{\Phi}_k,$$

де переносна сила інерції включена до ваги тіла  $\bar{P}$ :

$$\bar{\Phi}_k = -2m\bar{\omega} \times \bar{V}_r;$$

$$\Phi_{\kappa} = 2m\omega V \cos\alpha ,$$

де ознака відносності  $r$  опущена, як і на розрахунковій схемі.

Вважаючи, що  $\bar{P}$  і  $\bar{V}$  мало відхиляються від напрямку вертикалі  $Oz$ , складемо диференціальні рівняння відносного руху точки в проєкціях на рухомі осі:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= 0; \\ m\ddot{y} &= \Phi_{\kappa} = 2m\omega V \cos\alpha; \\ m\ddot{z} &= -mg. \end{aligned} \right\}$$

Отже, відносний рух матеріальної точки описується такою системою диференціальних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 0; \\ \ddot{y} &= 2\omega V \cos\alpha; \\ \ddot{z} &= -g. \end{aligned} \right\}$$

Інтегруючи цю систему рівнянь, одержимо:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C_1; \\ \dot{y} &= 2\omega g \frac{t^2}{2} \cos\alpha + C_2; \\ \dot{z} &= -gt + C_3, \end{aligned}$$

де прийнято  $V = gt$ .

Інтегруючи отриману систему диференціальних рівнянь, знаходимо рівняння, які наближено визначають закон відносного руху точки:

$$x = C_1 t + C_4;$$

$$y = \frac{\omega g}{3} \cos \alpha + C_2 t + C_5;$$

$$z = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_6.$$

Сталі  $C_1, C_2, \dots, C_6$  визначаються початковими умовами, які мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0; & \dot{x}_0 &= 0; \\ y_0 &= 0; & \dot{y}_0 &= 0; \\ z_0 &= H; & \dot{z}_0 &= 0. \end{aligned}$$

Отже,  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0, C_6 = H$ .

Тепер попередні рівняння набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} x &= 0; \\ y &= \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \alpha; \\ z &= H - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}$$

Точка  $M$ , як випливає з цих рівнянь, рухається в площині  $yOz$  і відхиляється від вертикалі на схід згідно із законом за другим рівнянням.

При  $z = 0$  можна визначити момент падіння точки на Землю:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Підставивши це значення  $t_1$  в друге рівняння, одержимо

$$y_{\max} = \frac{1}{3} \omega g \sqrt{\frac{8H^3}{g^3}} \cos \alpha = \frac{2}{3} H \omega \sqrt{\frac{2H}{g}} \cos \alpha.$$

За цією формулою за висотою і широтою місця падіння точки можна визначити величину її відхилення від вертикалі на схід. Так на широті Санкт-Петербурга ( $\alpha = 60^\circ$ ) точка, яка падає з висоти  $H = 100$  м, без урахування опору повітря відхиляється в східному напрямі на  $y_{\max} = 1,1$  см. Точка, кинута вертикально вгору, відхиляється від вертикалі не на схід, а на захід, оскільки коріолісова сила інерції в цьому випадку напрямлена перпендикулярно до площини меридіана на захід. Дією коріолісової сили інерції пояснюється також відхилення морських течій і вітрів сталого напрямку.

### 1.3 Основні вигляди диференціальних рівнянь механіки і їх розв'язання

Диференціальні рівняння розподіляються на звичайні та рівняння у частинних похідних. Звичайні диференціальні рівняння виникають, коли пошукова функція має одну змінну. У теоретичній механіці такими функціями, наприклад, є функції координати матеріальної точки від часу ( $x = f(t)$ ) і закону зміни швидкості від часу  $V = f_1(t)$ , або від координати ( $V = f_2(x)$ ).

Диференціальні рівняння у частинних похідних виникають, коли пошукова функція має дві або більше змінних.

Диференціальним рівнянням у частинних похідних з невідомою функцією  $z(x, y)$  є, наприклад, рівняння

$$x \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Легко перевірити, що цьому рівнянню задовольняє функція  $z = x^2 y^2$ .

Диференціальні рівняння в часткових похідних зустрічаються при розв'язанні більш складних задач класичної механіки і виходять за рамки навіть повного курсу теоретичної механіки.

Диференціальні рівняння також поділяються на лінійні й нелінійні. Нелінійні диференціальні рівняння розв'язують за допомогою різноманітних числових методів, найбільш відомими із яких є методи Ейлера і Рунге-Кутта. Такі задачі є більш складними і у звичайному курсі теоретичної механіки не розглядаються.

Диференціальні рівняння окрім того, що вже про них сказано, відрізняють за залежністю порядку похідної, а також присутністю або відсутністю правої частини рівняння. Якщо правої частини нема, то рівняння називають однорідним, а коли є – неоднорідним.

Крім того, диференціальні рівняння, що мають змінні, які можливо розділити за частинами, називають диференціальними рівняннями з розділяючими змінними. Якщо цього зробити неможливо, їх називають диференціальними рівняннями з нерозділяючими змінними.

Класифікація диференціальних рівнянь має велике значення, бо вигляду диференціального рівняння відповідає спосіб його розв'язування.

Наведемо три характерних випадки розв'язування диференціальних рівнянь з розділяючими змінними в динаміці.

### 1.3.1 Випадок, коли сила залежить лише від часу

Запишемо рівняння у послідовності їх розв'язування:

$$ma = F_x(t);$$

$$a = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dV}{dt};$$

$$dV = \frac{1}{m} F_x(t) dt;$$

$$\int_{V_0}^V dV = \frac{1}{m} \int_0^t F_x(t) dt .$$

Це перший інтеграл рівняння руху. Його одержали за допомогою першої підстановки  $d\dot{x} / dt = dV / dt$ .

Позначаючи праву частину останнього рівняння через  $f(t)$ , запишемо

$$V = V_0 + f(t).$$

Використовуємо тепер другу підстановку:

$$V = \frac{dx}{dt},$$

і знову розділимо змінні:

$$dx = (V_0 + f(t)) dt .$$

Інтегруємо цей вираз ще раз, будемо мати

$$x = x_0 + V_0 t + \int_0^t f(t) dt .$$



### 1.3.2 Випадок, коли сила залежить тільки від швидкості

Рівняння руху матеріальної точки можна записати у такому вигляді

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{m} F_x(V).$$

Це рівняння зводиться до квадратур також розділенням змінних:

$$m \int_{V_0}^V \frac{dV}{F_x(V)} = \int_0^t dt.$$

Позначаючи ліву частину через

$$f(V) = m \int_{V_0}^V \frac{dV}{F_x(V)},$$

запишемо отриманий перший інтеграл так:

$$f(V) = t.$$

Із цього рівняння знайдемо функцію

$$V = V(t),$$

і, підставляючи вираз для  $V = dx/dt$ , запишемо

$$\frac{dx}{dt} = V(t).$$

Знову розділяючи змінні та інтегруючи отримане рівняння, матимемо рівняння руху точки

$$x = x_0 + \int_0^t V(t) dt.$$

### 1.3.3 Випадок, коли сила залежить тільки від положення точки

Рівняння руху точки має вигляд

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x(x).$$

Для розв'язання такого диференціального рівняння використовують третю підстановку

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = V \frac{dV}{dx},$$

тоді

$$mV \frac{dV}{dx} = F(x).$$

Тепер розділемо змінні та проінтегруємо при початкових умовах:

$$\int_{V_0}^V V dV = \frac{1}{m} \int_{x_0}^x F_x(x) dx .$$

Позначимо інтеграл справа через  $f(x)$  і запишемо отриманий результат:

$$\frac{1}{2} V^2 - \frac{1}{2} V_0^2 = f(x) ,$$

тобто

$$V = \pm \sqrt{V_0^2 + 2f(x)} .$$

Знак перед коренем повинен відповідати фізичному змісту задачі.

Щоб одержати рівняння руху з першого інтеграла, потрібно підставити в нього  $V = dx/dt$  і ще раз розділити змінні та проінтегрувати:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{V_0^2 + 2f(x)}} = t .$$

Звідки знаходимо рівняння руху:

$$x = x(t) .$$

Раніше були розглянуті випадки, коли при розв'язанні диференціальних рівнянь було можливо розділити змінні за частинами рівнянь. Така змо-

га є не завжди. З такими диференціальними рівняннями ми, наприклад, зустрічалися, розглядаючи коливальний рух матеріальної точки. У таких випадках пошук рішення диференціальних рівнянь проводять за допомогою тригонометричних або експоненціальних функцій. Так, рішення диференціального рівняння вільних коливань без обрахування опору

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

знаходилося у вигляді

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

а рішення диференціального рівняння вільних затухаючих коливань

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0,$$

знаходилося у вигляді

$$x = e^{\lambda t}.$$

При розгляданні вимушених коливань диференціальні рівняння не є однорідними. Такі рівняння мають два рішення. Одне загальне (без правої частини, тобто однорідне), друге – частинне всього диференціального рівняння. Пошуки першого рішення уже відомі. Друге рішення знаходять у формі другої частини рівняння.

Наприклад, диференціальне рівняння вимушених коливань без обрахування опору, таке:

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin(pt + \delta).$$

Рішення цього диференціального рівняння складається із двох рішень:

частинного і загального.

Тобто,

$$x = x_1 + x_2,$$

де

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

є загальним рішенням, а  $x_2$  – частинне рішення, яке знаходиться у вигляді правої частини.

Тобто

$$x_2 = B \sin(pt + \delta).$$

Невідома стала  $B$  знаходиться підстановкою  $x_2$  в загальне диференціальне рівняння. У нашому прикладі

$$B = h/k^2 - p^2.$$

Усі основні чотири види коливальних рухів мають відомі рішення відповідно до параметрів  $k$ ,  $n$  і  $p$  і досконало розглянуті при вивченні коливального руху матеріальної точки.

Тому розв'язування задач коливального руху зводиться до пошуку сталих інтегрування за початковими умовами.

При рішенні диференціальних рівнянь рекомендуємо звертатися до переліку інтегралів від простих функцій. Справедливість написаних в неї рівностей легко перевірити диференціюванням, тобто установити, що похідна від правої частини дорівнює підінтегральній функції. Під  $C$  в формулах переліку мається на увазі довільна стала.

Перелік інтегралів від деяких функцій:

$$1 \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1).$$

$$2 \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$3 \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$$

$$4 \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x + C$$

$$5 \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$6 \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$7 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin}x + C$$

$$8 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$$

$$9 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$10 \int e^x dx = e^x + C$$

$$11 \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$12 \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$13 \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$14 \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$15 \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$16 \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$17 \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C$$

#### 1.4 Фізичні й математичні аналогії при розв'язанні задач динаміки точки

У першому розділі “Динаміка матеріальної точки” розглянуті методичні прийоми розв'язування задач на окремих прикладах, хоча існує за цією темою велика кількість задач. Виникає запитання: “Як навчитись розв'язувати задачі взагалі?”.

Якщо уважно придивитись до розглянутих прикладів, то можна помітити, що незалежно від різних їх умов, рішення мають деякі аналогічні риси. Усі аналогії в послідовності розв'язання задач розподілимо на:

- 1 Аналогії в поняттях.
- 2 Аналогії в зв'язках між поняттями.
- 3 Аналогії в постанові задач.
- 4 Аналогії в діях.
- 5 Аналогії в результатах.

Почнемо з аналогії в поняттях. У динаміці матеріальної точки використовують основне рівняння динаміки

$$m\bar{a} = \bar{F},$$

де  $\bar{F}$  – рівнодійна сил, прикладених до точки.

Це рівняння об'єднує три поняття. Усі вони використовуються при розв'язанні всіх задач динаміки точки. Крім того поняття маси, прискорення і діючої сили пов'язані між собою рівнянням.

Якщо основне рівняння динаміки записати в інших формах:

$$m \cdot \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F}, \quad \text{або} \quad m \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} = \bar{F},$$

то можна помітити аналогії між відповідними поняттями і їх зв'язками: залежність між  $\bar{r}$  і  $\bar{V}$  і залежності між  $\bar{V}$  і  $\bar{a}$ .

Запишемо вектори  $\bar{r}$ ,  $\bar{V}$  і  $\bar{a}$  через їх проекції на осі координат:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k};$$

$$\bar{V} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k};$$

$$\bar{a} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}.$$

У записаних формулах присутні аналогії. Крім того, залежності між відповідними поняттями:

$$x, y, z \text{ і } \dot{x}, \dot{y}, \dot{z};$$

$$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \text{ і } \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z},$$

також аналогічні.

Звертаючись до динамічної теореми Каріоліса можна визначити аналогії між залежностями відносної, переносної і абсолютної швидкостями точки та її відповідними прискореннями.

Звернемо увагу на аналогії в постанові задач.

У основному рівнянні динаміки, як уже було відмічено, зв'язані три поняття: маса, прискорення і сила.



Із цього виходить, що за двома відомими із трьох можна визначити одне невідоме.

Якщо відома маса точки та закон руху, то визначають рівнодійну сил, які діють на точку. Така задача називається першою задачею динаміки. Умови цих задач мало чим суттєво відрізняються, тобто має місце аналогія умов. Теж саме має відносини і до другої задачі динаміки.

Розглянемо аналогію в діях при виконанні другої задачі. З цією метою прослідкуємо за ходом виконання будь-якого із розглянутих раніше прикладів. Це дає змогу відслідити такий план дій:

- 1 Зобразити точку на траєкторії її руху в проміжному стані.
- 2 Вибрати систему координат.
- 3 Прикласти до точки діючі активні сили.
- 4 Відкинути в'язі, накладені на точку, і прикласти до неї реакції в'язей.
- 5 Скласти диференціальні рівняння руху точки в вибраних координатах.
- 6 Розв'язати (проінтегрувати) отримані диференціальні рівняння.
- 7 Визначити сталі інтегрування за допомогою початкових умов.
- 8 Записати в кінцевому вигляді рівняння руху точки.
- 9 Зробити аналіз отриманих рівнянь і визначити невідомі. (Виконання цього пункту виникає за додатковими умовами задачі).

Усі задачі, які належать до другої задачі динаміки точки, мають приведену послідовність, тобто присутня аналогія дії.

Аналогічно можна отримати план розв'язання першої задачі динаміки.

Кінцевою умовою рішення будь-якої задачі є отримання результату.

Звернемось до послідовності дії при розв'язанні другої задачі динаміки. Кінцева умова її міститься в пунктах 8 і 9. Восьмий пункт виконується завжди. Останній – у випадку додаткових умов. Так, у розглянутому прикладі руху точки, кинutoї під кутом до горизонту, додатковими умовами були: визначення дальності польоту точки, максимальної досягнутої висоти і часу польоту.

Таким чином, отримані результати рішення задач теж мають ознаки аналогії.

Прикладом аналогії є поняття вектора. Векторами з'являються: радіус-вектор  $\vec{r}$ , швидкість  $\vec{V}$ , прискорення  $\vec{a}$  і сила  $\vec{F}$ . Усі вектори мають аналогічні математичні ознаки і аналогічні дії з ними.

У попередніх прикладах аналогії було розглянуто математичні їх ознаки. Розглянемо тепер ознаки аналогії з боку фізичних процесів.

Усі поняття основного рівняння динаміки є фізичними поняттями. Тому всі дії з ними відповідно до цього рівняння, а також отримані результати мають фізичну основу. Без уяви цієї основи неможливе грамотне розв'язання задач, бо неможливо вірно скласти диференціальні рівняння руху точки і зрозуміти отримані результати їх рішення. Саме диференціальні рівняння руху точки є аналогом фізичного процесу цього руху.

Іноді фізична модель і математичний її аналог збігаються повністю, а іноді ні.

Коли, наприклад, розглядали рух точки, кинutoї під кутом до горизонту (див.рис.1.4), то отримані диференціальні рівняння описували її рух з невеличкою помилкою, бо не враховували відносний рух від оберту Землі. Іншими словами, указані вище аналогії були неповними, тобто приблизними.

Визначимо вплив аналогії з іншого боку. Припустимо, що необхідно розв'язати дві задачі. За однією треба розглянути рух тіла, кинutoго вертикально вгору, а за другою – кинutoго під кутом до горизонту. Тут можливе розв'язування задач окремо (по одній). Однак, неважко зрозуміти, що задача про рух точки, кинutoї під кутом є загальною по відношенням до першої. Тобто, перша задача є частковим випадком (частковою аналогією) другої. При розв'язанні задач краще мати загальне рішення, бо часткові випадки можна отримати із загального. Але існують винятки. Так, коли загальне рішення громіздке, то буває легше знаходити часткове розв'язування задач окремо.

Фізичні аналогії дають змогу проаналізувати отримані результати, наприклад, при розгляданні руху тіла встановили, що його швидкість дорівнює 300 000 м/с. Явно видно, що при розв'язанні задачі не все гаразд або не коректна її умова, бо таку швидкість має світло.

Приклади аналогії різноманітні. Їх можна продовжувати далі. Однак, вже із наведених прикладів можна зробити висновок, що врахування ана-

логій дає змогу підходити до розв'язання різноманітних задач з єдиною методичною системою, а також запобігати деяких можливих помилок при їх розв'язанні.

### *1.5 Оптимальні рухи точки. Рух точки за найменший час або на найбільшу відстань*

Перша задача визначення оптимального руху точки за ідеальною гладкою кривою відома як задача про брахистохрон (від грецького „брахистос” – найкоротший, „хронос” – час) була поставлена і вирішена відомим математиком і механіком Бернуллі (1667 – 1748).

Механіко-геометрична задача про лінію найбільш швидкого спуску формулюється ним у наступному вигляді: „Визначити криву лінію, яка з'єднує дві дані точки, не розташовані на одній і тій же вертикальній лінії. Лінія має ту властивість, що тіло, яке рухується по ній під впливом своєї ваги і починає свій рух із верхньої точки, досягає нижчої за найкоротший час”.

У сучасних умовах розвитку промисловості, окремих технологій, космічної техніки і економіки такі пошуки оптимальних умов того чи іншого процесу мають все більше значення.

Для підтвердження того, що було сказано вище, наведемо приклад визначення найменшого часу руху точки (рис. 1.22).

Припустимо, що із точки  $A$  необхідно опустити важку точку на нахилену площину  $OD$ , яка створює з горизонтом кут  $\alpha$ . Якщо зробити це за найменшою відстанню точки  $A$  до площини, то необхідно пустити тіло по прямій  $AB$  перпендикулярно до площини, Ця пряма створює з вертикаллю  $AO$  кут  $\alpha$ .

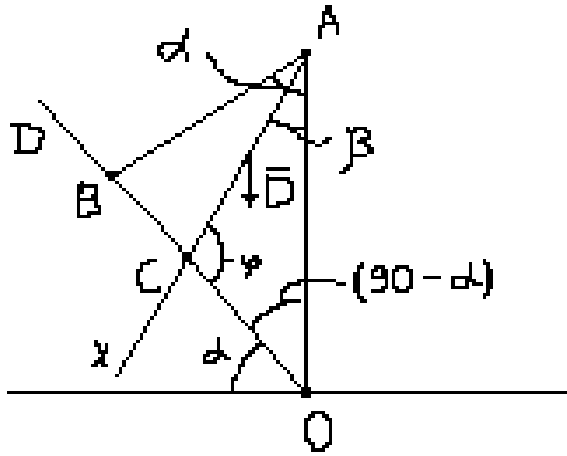


Рисунок 1.22

Як було відомо ще Галілею (1564-1642), не завжди рух за найменший час співпадає з рухом по найкоротшому шляху.

Наведений приклад має ще один парадокс. Якщо пускати тіло в напрямках  $AB$  і  $AO$  (вертикальне падіння), то час руху тіла у цих різних напрямках не відрізняється, тобто складається враження, що послідовний перехід напрямів руху тіла від прямої  $AB$  до вертикалі  $AO$  не змінює час руху тіла до нахиленої площини  $OD$ . Але це не так.

Оберемо вільний напрям  $AC$  руху тіла до нахиленої осі  $x$ , який напрямлено до вертикалі  $AO$  під деяким кутом  $\beta$ . Диференціальне рівняння руху точки за цим напрямом має вигляд

$$\ddot{x} = g \cos \beta,$$

Після інтегрування маємо закон руху тіла

$$x = g \cos \beta t^2 / 2.$$

При  $t = T$ , де  $T$  – час руху тіла до площини  $OD$ ,  $x = AC$ , де  $AC$  – шлях руху тіла до цієї площини.

Таким чином,

$$AC = g \cos \beta T^2 / 2.$$

Використаємо теорему синусів для трикутника  $OAC$ . Тоді

$$\frac{AC}{\sin(90 - \alpha)} = \frac{AO}{\sin \varphi},$$

де  $\varphi = 180 - (90 - \alpha) - \beta$ , або  $\varphi = 90 + (\alpha - \beta)$ .

Таким чином,

$$\frac{AC}{\cos \alpha} = \frac{AO}{\cos(\alpha - \beta)}.$$

Використовуючи два вирази для  $AC$ , отримаємо рівняння

$$\frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha - \beta)} \cdot AO = g \cos \beta \frac{T^2}{2},$$

відкіля

$$T = \sqrt{\frac{2 \cos \alpha \cdot OA}{g \cos \beta \cdot \cos(\alpha - \beta)}}.$$

Призначимо кут  $\alpha$  вільним і фіксованим кутом.

Кут  $\beta$  є змінним в інтервалі

$$0 \leq \beta \leq \alpha .$$

Якщо час руху  $T$  тіла має найменше значення в означеному інтервалі кута  $\beta$ , то похідна від  $T$  за  $\beta$  дорівнює нулю, тобто

$$\frac{dT}{d\beta} = 0,$$

тоді виникає рівняння

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{2\cos\alpha OA}{g\cos\alpha \cdot \cos(\alpha - \beta)}}} \cdot \frac{-2g\cos\alpha \cdot OA(-\sin\beta \cdot \cos(\alpha - \beta) + \cos\beta \cdot \sin(\alpha - \beta))}{g^2 \cos^2 \beta \cdot \cos^2(\alpha - \beta)} = 0,$$

відкіля 
$$\cos\beta \cdot \sin(\alpha - \beta) - \sin\beta \cdot \cos(\alpha - \beta) = 0,$$

або

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) - \operatorname{tg}\beta = 0.$$

Тобто

$$\alpha - \beta - \beta = 0;$$

де  $\beta = \alpha / 2$ .

Таким чином, аналіз часу руху тіла до нахиленої площини  $OD$  можна відобразити відповідно на графіку (рис. 1.23). Рух тіла на найбільшу

відстань було розглянуто раніше на прикладі руху тіла, кинутого під кутом до горизонту.

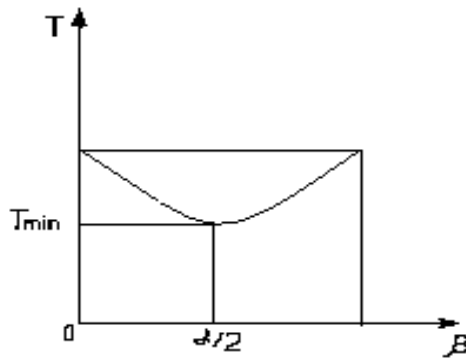


Рисунок 1.23

## 1.6 Індивідуальні завдання для самостійної роботи і контролю знань

### 1.6.1 Перша і друга задачі динаміки

- 1 Точка масою  $m=1,4 \text{ кг}$  рухається вздовж горизонтальної осі за законом  $x = 6t^2 + 6t + 3$ . Визначити модуль рівнодійної сили, яка прикладена до точки.
- 2 Точка масою  $m=10 \text{ кг}$  рухається вздовж горизонтальної осі  $Ox$  відповідно рівнянню  $x = 5\sin 0,2t$ . Визначити модуль рівнодійної сил, діючих на точку у момент часу  $t = 7 \text{ с}$ .
- 3 Точка масою  $m=6 \text{ кг}$  рухається у горизонтальній площині  $Oxy$  з прискоренням  $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ . Визначити модуль сили, яка діє на неї у площині руху.
- 4 Точка масою  $m=7 \text{ кг}$  рухається у горизонтальній площині  $Oxy$  із швидкістю  $\vec{V} = 0,4t\vec{i} + 0,5t\vec{j}$ . Визначити модуль сили, яка діє на неї у площині руху.

- 5 Рух точки масою  $m=9$  кг у площині  $Oxy$  визначається радіусом-вектором  $\vec{r} = 0,6t^2\vec{i} + 0,5t^2\vec{j}$ . Визначити модуль рівнодійної сил прикладених до точки.
- 6 Рух точки масою  $m=8$  кг відбувається у горизонтальній площині відповідно рівнянням  $x = 0,05t^3$  і  $y = 0,3t^2$ . Визначити модуль рівнодійної прикладених до точки сил у момент часу  $t = 4$  с.
- 7 Точка масою  $m=900$  кг рухається за горизонтальною прямою під дією сили  $F = 270t$ , яка спрямована за тією ж прямою. Визначити швидкість точки у момент часу  $t = 10$  с, коли при  $t_0 = 0$  швидкість  $V_0 = 10$  м/с.
- 8 Точка масою  $m=25$  кг починає рух із стану спокою за горизонтальною прямою під дією сили  $F = 20t$ , яка спрямована за тією ж прямою. Визначити шлях, який пройшла точка за 4с.
- 9 Точка масою  $m=100$  кг рухається за горизонтальною прямою під дією сили  $F = 10t$ , яка спрямована за тією ж прямою. Визначити час, за яким швидкість точки збільшиться від 5 до 25м/с.
- 10 Тіло масою  $m=12$  кг із стану спокою рухається за горизонтальною прямою під дією сили  $F = 0,6t$ , яка спрямована за тією ж прямою. Визначити шлях, який пройшло тіло за 10с після початку руху.
- 11 Точка масою  $m=0,2$  кг рухається вздовж осі  $Ox$  під дією сили  $F_x = -0,4t$ . Визначити швидкість точки у момент часу  $t = 2$  с, якщо її початкова швидкість  $V_{x0} = 6$  м/с.



- 12 Визначити шлях, який пройшла точка масою  $m$  по осі  $Ox$  за час  $t = 1 \text{ c}$ , якщо вона рухається під дією сили  $F_x = 12mt$ . У момент часу  $t_0 = 0$  координата  $x_0 = 3 \text{ м}$ , швидкість  $V_{x0} = 6 \text{ м/с}$ .
- 13 Тіло масою  $m = 1 \text{ кг}$  падає вертикально, сила опору повітря  $R = 0,03V$ . Визначити найбільшу швидкість падіння тіла.
- 14 Точка масою  $m = 2 \text{ кг}$  рухається вздовж горизонтальної осі  $Ox$  під дією сили  $F_x = 5 \cos 0,5t$ . Визначити швидкість точки в момент часу  $t = 4 \text{ c}$ , якщо при  $t_0 = 0$  швидкість  $V_0 = 0$ .
- 15 Точка масою  $m$  вздовж горизонтальної осі  $Ox$  під дією сили  $F_x = 6m \sin 2t$ . У початковий момент часу швидкість точки  $V_{x0} = 3 \text{ м/с}$ . Визначити сталу інтегрування у рівнянні швидкості
- 16 Точка масою  $m = 7 \text{ кг}$  із стану спокою рухається по осі  $Ox$  під дією сили  $F_x = 4 \sin \pi t/3$ . Визначити швидкість точки в момент часу  $t = 1 \text{ c}$ .
- 17 На точку масою  $m = 20 \text{ кг}$ , яка рухається вздовж горизонтальної прямої діє сила опору  $R = 0,2V^2$ . За скільки секунд швидкість точки зменшиться від 10 до 5 м/с?
- 18 На точку масою  $m = 250 \text{ кг}$ , яка рухається вздовж горизонтальної прямої діє сила опору  $R = 5V^2$ . Визначити швидкість точки в момент часу  $t = 6 \text{ c}$ , якщо при  $t_0 = 0$  її швидкість  $V_0 = 20 \text{ м/с}$ .

- 19 Точка масою  $m=4$  кг рухається вздовж горизонтальної прямої. Через скільки секунд швидкість точки зменшиться в 10 разів, якщо сила опору руху  $R = 0,8V$  ?
- 20 Точка масою  $m=10$  кг рухається криволінійно під дією сили  $F = 0,4t$  . Визначити дотичне прискорення точки в момент часу  $t = 40$  с , коли кут між силою і вектором швидкості складає  $30^\circ$  .
- 21 У середині гладкої трубки, вигнутій по колу радіуса  $R = 2$  м , у горизонтальній площині із стану спокою рухається точка масою  $m=42$  кг під дією сили  $F=21$  Н. Визначити горизонтальну реакцію трубки в момент часу  $t=7$  с , якщо напрямок сили співпадає з вектором швидкості.
- 22 Точка рухається криволінійно під дією сили, тангенціальна складаюча якої  $F_\tau = 0,2t^2$  , а нормальна складаюча  $F_n = 8H$  . Визначити масу точки, якщо в момент часу  $t = 10$  с її швидкість  $V = 0,7$  м/с .
- 23 Точка масою  $m=5$  кг рухається криволінійно під дією сили, проєкція якої на дотичну  $F_\tau = 7$  Н , на нормалі  $F_n = 0,1t^2$  . Визначити модуль прискорення точки в момент часу  $t = 12$  с .
- 24 Точка рухається криволінійно під дією сили  $\vec{F} = 9\vec{\tau} + 8\vec{n}$  . Визначити масу точки, якщо її прискорення  $a = 0,5$  м/с<sup>2</sup> .
- 25 Точка масою  $m=2$  кг рухається криволінійно під дією сили  $\vec{F} = 3\vec{\tau} + 4\vec{n}$  . Визначити модуль прискорення точки.

- 26 Точка рухається криволінійно під дією сили  $\vec{F} = 15\vec{\tau} + 0,3t\vec{n}$ .  
Визначити масу точки, якщо в момент часу  $t = 20\text{ с}$  її прискорення  $a = 0,6\text{ м/с}^2$ .
- 27 Точка масою  $m = 2\text{ кг}$  рухається криволінійно під дією сили  $\vec{F} = 0,4t\vec{\tau} + 3\vec{n}$ . Визначити модуль прискорення точки в момент часу  $t = 10\text{ с}$ .
- 28 Точка масою  $m = 2\text{ кг}$  рухається в площині  $Oxy$  під дією сили, проекції якої  $F_x = 2 \sin \pi t$  і  $F_y = 5 \cos \pi t$ . Визначити модуль прискорення точки в момент часу  $t = 1\text{ с}$ .
- 29 Точка масою  $m = 18\text{ кг}$  рухається в горизонтальній площині під дією сили  $F = 25\text{ Н}$ . Визначити радіус кривини траєкторії в момент часу, коли швидкість точки  $V = 4\text{ м/с}$ , а вектори швидкості й сили створюють між собою кут  $60^\circ$ .
- 30 На горизонтальному диску на відстані  $2\text{ м}$  від його вертикальної осі обертання знаходиться тіло. Визначити кутову швидкість рівномірного обертання диску, збільшення якої приведе до сковзання тіла по диску, якщо коефіцієнт тертя ковзання  $f = 0,3$ .

### 1.6.2 Коливальний рух точки

- 1 Вантаж масою  $m = 3\text{ кг}$  підвішений до пружини з коефіцієнтом жорсткості  $c = 300\text{ Н/м}$  і знаходиться у вільному прямолінійному вертикальному коливальному русі. Визначити амплітуду коливань вантажу в сантиметрах, якщо в момент часу  $t_0 = 0$  його швидкість  $V_0 = 2\text{ м/с}$ , а зміщення від стану статичної рівноваги  $x_0 = 0,3\text{ м}$ .

- 2 Вантаж масою  $m=9$  кг підвішений до пружини з коефіцієнтом жорсткості  $c=90$  Н/м, здійснює вільні вертикальні коливання з амплітудою 0,1 м. Визначити початкову швидкість вантажу, якщо коливання почались із стану статичної рівноваги.
- 3 Коливання точки задані рівнянням  $x = 20\cos 4t + 30\sin 4t$ , де  $x$  – у сантиметрах. Визначити амплітуду коливань в сантиметрах.
- 4 Точка масою  $m=0,3$  кг підвішена до пружини і здійснює вільні вертикальні коливання з амплітудою 0,4 м. Визначити коефіцієнт жорсткості пружини, якщо коливання почались із стану статичної рівноваги з початковою швидкістю 3 м/с.
- 5 Точка, яка підвішена до пружини з коефіцієнтом жорсткості  $c=700$  Н/м, здійснює вільні вертикальні коливання з амплітудою 0,2 м. Визначити масу точки, якщо коливання почались із стану статичної рівноваги з початковою швидкістю 3 м/с.
- 6 Диференціальне рівняння  $\ddot{y} + 9y = 0$  описує вільні вертикальні коливання точки. Визначити кутову частоту коливань.
- 7 Диференціальне рівняння вільних вертикальних коливань точки, підвішеної до пружини має вигляд  $\ddot{x} + 20x = 0$ . Визначити кутову частоту вільних вертикальних коливань і масу точки, якщо коефіцієнт жорсткості пружини  $c=150$  Н/м.
- 8 Період вільних вертикальних коливань вантажу, підвішеного на пружині з коефіцієнтом жорсткості  $c=2$  кН/м, дорівнює  $T = \pi c$ . Визначити масу вантажу.

- 9 Точка підвішена до пружини і здійснює вільні вертикальні коливання з періодом  $T = 0,5 \text{ с}$ . Визначити масу точки, якщо коефіцієнт жорсткості пружини  $c = 200 \text{ Н/м}$ .
- 10 Визначити період вільних вертикальних коливань вантажу масою  $m = 80 \text{ кг}$ , який прикріплений до пружини з коефіцієнтом жорсткості  $c = 2 \text{ кН/м}$ .
- 11 Диференціальне рівняння коливального руху точки має вигляд  $\ddot{x} + 8\dot{x} + 25x = 0$ . Знайти умовний період згасаючих коливань.
- 12 Вантаж масою  $m = 2 \text{ кг}$  підвішений до пружини з коефіцієнтом жорсткості  $c = 30 \text{ Н/м}$  і знаходиться в коливальному русі. Визначити кутову частоту згасаючих коливань, якщо сила опору руху вантажу  $\bar{R} = -4\bar{v}$ .
- 13 Диференціальне рівняння коливального руху точки має вигляд  $\ddot{x} + 8\dot{x} + 25x = 0$ . Знайти кутову частоту згасаючих коливань.
- 14 Згасаючі коливання точки описуються рівнянням  $x = Ae^{0,2t} \sin(0,5t + \alpha)$ . Визначити кутову частоту вільних коливань цієї точки, якщо сили опору відсутні.
- 15 Диференціальне рівняння коливального руху точки має вигляд  $5\ddot{x} + 20\dot{x} + cx = 0$ . Знайти найбільше значення коефіцієнта жорсткості  $C$ , при якому рух точки буде аперіодичним.
- 16 Розв'язання диференціального рівняння згасаючих коливань точки має вигляд  $x = Ae^{0,8t} \sin(4t + \alpha)$ . Визначити коефіцієнт жорсткості пружини, до якої прикріплене тіло, якщо його маса  $m = 10 \text{ кг}$ .

- 17 Диференціальне рівняння руху точки має вигляд  $3\ddot{x} + \mu\dot{x} + 48x = 0$ . Знайти найменше значення коефіцієнта  $\mu$  опору середовища, при якому рух системи буде аперіодичним.
- 18 Диференціальне рівняння руху точки має вигляд  $3\ddot{x} + 12\dot{x} + cx = 0$ . Знайти найбільше значення коефіцієнта жорсткості  $C$ , при якому рух буде аперіодичним.
- 19 На точку масою  $m=6$  кг, яка знаходиться в коливальному русі, діє сила опору  $\bar{R} = -\mu\bar{v}$ . Визначити коефіцієнт  $\mu$ , якщо закон руху точки має вигляд  $x = Ae^{0,1t} \sin(7t + \alpha)$ .
- 20 Вантаж підвішений до пружини з коефіцієнтом жорсткості  $c=200$  Н/м і рухається прямолінійно відповідно рівнянню  $y = Ae^{0,9t} \sin(5t + \alpha)$ . Визначити масу вантажу.
- 21 Точка масою  $m=5$  кг підвішене до пружини. Визначити коефіцієнт жорсткості пружини, якщо диференціальне рівняння прямолінійного поступового руху точки має вигляд  $\ddot{x} + 6\dot{x} + 40x = 5\sin 15t$ .
- 22 Диференціальне рівняння коливального руху точки масою  $m=3$  кг має вигляд  $\ddot{x} + 4\dot{x} + 30x = 15\sin 8t$ . Визначити найбільше значення збурюючої сили.
- 23 Диференціальне рівняння коливального руху точки масою  $m=12$  кг має вигляд  $\ddot{y} + 8\dot{y} + 60y = 15\sin 3t$ . Сила опору руху точки  $R = -\mu\dot{y}$ . Визначити коефіцієнт  $\mu$ .

- 24 Тіло масою  $m=5$  кг підвішене до пружини з коефіцієнтом жорсткості  $c=50$  Н/м. Сила опору руху  $\bar{R} = -4\bar{V}$ . Визначити, при якій кутовій частоті вертикальної збурюючої сили коефіцієнт динамічності буде найбільшим.
- 25 На точку масою  $m=10$  кг, яка підвішена до пружини з коефіцієнтом жорсткості  $c=150$  Н/м, діє вертикальна збурююча сила  $F = 10\sin pt$  і сила опору  $\bar{R} = -8\bar{V}$ . Визначити найбільшу амплітуду вимушених коливань, змінюючи значення кутової частоти збурюючої сили.
- 26 Визначити коефіцієнт динамічності, якщо диференціальне рівняння вимушених коливань точки  $\ddot{y} + 8\dot{y} + 250y = 6\sin 10t$ .
- 27 Визначити амплітуду коливань точки, якщо диференціальне рівняння її руху має вигляд  $\ddot{x} + 6\dot{x} + 30x = 4\sin 2t$ .
- 28 Диференціальне рівняння коливального руху точки масою  $m=4$  кг задане у вигляді  $\ddot{x} + 7x = 0,5\sin(3t + 0,6)$ . Визначити найбільше значення збурюючої сили.
- 29 Диференціальне рівняння руху вертикальних коливань точки підвішеної до пружини з коефіцієнтом жорсткості  $c=24$  Н/м, має вигляд  $\ddot{x} + 8x = 1,2\sin(4t + 0,3)$ . Визначити найбільше значення збурюючої сили.
- 30 Вантаж масою  $m=18$  кг підвішений до пружини з коефіцієнтом жорсткості  $c=360$  Н/м, виконує вертикальні коливання під дією вертикальної збурюючої сили  $F = 36\sin 3t$ . Визначити амплітуду вимушених коливань.

## 2 ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ

При розв'язанні багатьох задач динаміки точки та системи широко застосовуються так звані загальні теореми динаміки, які безпосередньо випливають з основного закону динаміки.

Значення основних теорем полягає в тому, що вони встановлюють наочні залежності між основними динамічними характеристиками руху матеріальних систем, які широко використовуються в інженерній практиці. Крім того, основні теореми дають можливість вивчити окремі, практично важливі сторони даного явища, не вивчаючи це явище в цілому.

Застосування основних теорем на практиці нерідко приводить до повного розв'язання поставленої задачі; при цьому відпадає потреба інтегрування рівнянь руху, що є значно складнішою задачею.

Однак задовольнитися використанням основних теорем можна лише при вивченні найбільш простих рухів систем або при розгляді якої-небудь однієї сторони складних рухів. Вичерпні відомості про рух може дати тільки повне інтегрування диференціальних рівнянь руху.

До основних теорем динаміки відносяться: теорема зміну кількості руху, про рух центра мас, теорема про зміну моменту кількості руху, а також теорема про зміну кінетичної енергії.

Ці теореми формулюються як для однієї матеріальної точки, так і для механічної системи матеріальних точок, можуть бути представлені в диференціальній або кінцевій (інтегральній) формі.

### 2.1 Теорема про зміну кількості руху матеріальних об'єктів

#### 2.1.1 Застосування теореми у загальному вигляді

Загальний вираз теореми про зміну кількості руху матеріальних об'єктів має такий вигляд

$$\overline{Q} - \overline{Q}_0 = \sum_{i=1}^N \overline{S}_i^e. \quad (2.1)$$



де  $\bar{Q}$ ,  $\bar{Q}_0$  – кількість руху об'єкту в кінцевому та початковому положенні;

$\bar{S}$  – імпульс діючої на об'єкт сили.

Вектор  $\overline{mV}$  кількості руху матеріальної точки дорівнює добутку маси точки та її швидкості і має напрям швидкості, а кількість руху механічної системи визначається залежністю:

$$\bar{Q} = \sum m_i \bar{V}_i = M \cdot \bar{V}_C,$$

де  $M$  – маса системи,  $\bar{V}_C$  – швидкість центру мас.

Імпульс  $\bar{S}$  сили  $\bar{F}$  за кінцевий проміжок часу  $t_1$  визначається як інтеграл від елементарного  $d\bar{S} = \bar{F} \cdot dt$  імпульса сили, тобто:

$$\bar{S} = \int_0^{t_1} \bar{F} \cdot dt.$$

При розв'язанні задач необхідно від векторної форми запису теореми (2.1) перейти до її скалярної форми тобто записати теорему у проекціях на осі координат, згідно з чим маємо

$$\left. \begin{aligned} Q_x - Q_{ox} &= \sum_{i=1}^N S_{ix}^e, \\ Q_y - Q_{oy} &= \sum_{i=1}^N S_{iy}^e, \\ Q_z - Q_{oz} &= \sum_{i=1}^N S_{iz}^e. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Кількість рівностей (2.2) залежить від розв'язання конкретної задачі.

Розглянемо використання теореми для розв'язання задач динаміки на такому прикладі.

Середнє показання динамометра (рис.2.1), встановленого між тепловозом і вагонами вантажного потяга, за  $t$  секунд дорівнює  $P$ .

Протягом цього часу потяг рухався на підйом ( $\alpha$  – кут підйому) і швидкість його зросла від  $V_0$  до  $V$ , коефіцієнт сумарного опору руху потяга дорівнює  $f$ .

Визначити вагу потяга.

### Рішення

Розглянемо поступальний рух потяга як матеріальної точки. На потяг діють такі сили:

$\bar{P}$  – рушійна сила, модуль якої показує динамометр;

$\bar{G}$  – вага потяга;

$\bar{N}$  – нормальна реакція рейок;

$\bar{R}$  – сила опору рухові потяга з модулем  $R = fG \cos \alpha$

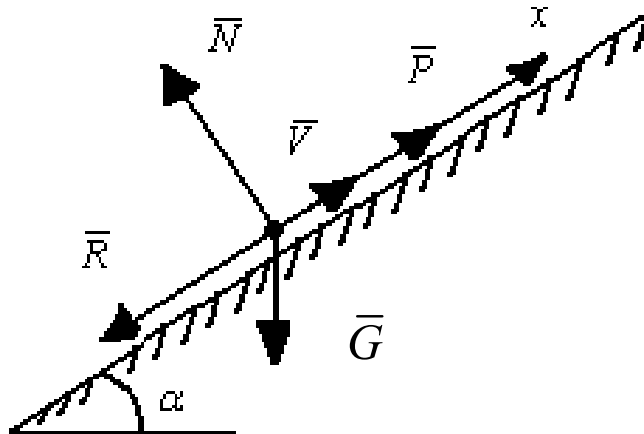


Рисунок 2.1

Для розв'язування задачі використаємо теорему у проекції на вісь, напрямлену за траєкторією руху потяга в бік його руху.

Згідно з формулою 2.2, вважаючи потяг матеріальною точкою, маємо:

$$mV_x - mV_{ox} = \sum_{i=1}^n S_{ix}.$$

Оскільки вектори кількості руху  $m\bar{V}_0$  і  $m\bar{V}$  напрямлені в бік напрямку осі  $X$ , то  $mV_{ox} = mV_0$  і

$$mV - mV_0 = \sum_{i=1}^n S_{ix}. \quad (2.3)$$

Сума проєкцій імпульсів на вісь  $X$ :

$$\sum_{i=1}^n S_{ix} = Pt - Gt \sin \alpha - fGt \cos \alpha. \quad (2.4)$$

Відповідно формулам (2.3 і 2.4) будемо мати

$$mV - mV_0 = Pt - Gt(\sin \alpha + f \cos \alpha),$$

звідси

$$G = \frac{Pt - m(V - V_0)}{t(\sin \alpha + f \cos \alpha)}.$$

Для малого кута  $\alpha$ :

$$\cos \alpha \approx 1; \quad \sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \alpha, \text{ тоді}$$

$$G = \frac{Pt - m(V - V_0)}{t(\alpha + f)}.$$

Розглянемо приклад криволінійного руху точки.

Матеріальна точка масою  $m$  кинута з поверхні Землі з швидкістю  $V_0$  під кутом  $\alpha$  до горизонту в вертикальній площині. Знайти швидкість падіння і кут падіння точки на поверхню Землі, нехтуючи опором повітря, якщо час польоту, відповідно до виразу (1.23) буде  $t = 2V_0 \cdot \sin\alpha / g$ .

### Рішення

Виберемо систему координат. Вісь  $X$  горизонтальна, вісь  $Y$  напрямлена по вертикалі вгору. Початок координат вибираємо в тій точці, в якій була точка  $M$  у початковий момент часу.

Довільне положення точки помітимо координатами  $X$  і  $Y$ . Це змінні координати часу. Розглянемо сили, що діють на точку при довільному положенні на траєкторії.

З умови задачі випливає, що єдиною силою, прикладеною до точки, є сила ваги  $P = mg$  (рис. 2.2).

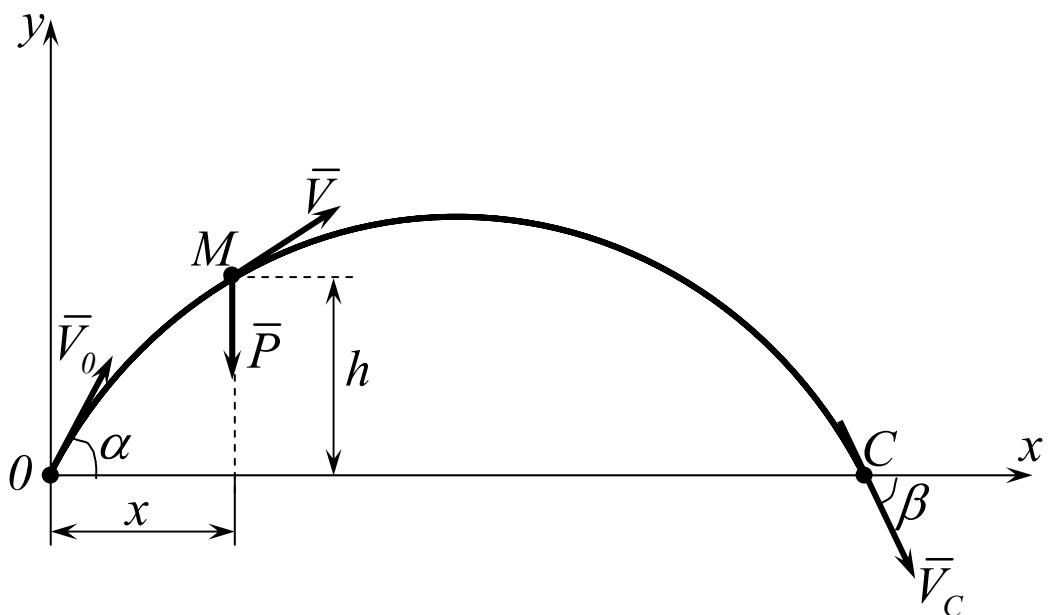


Рисунок 2.2

Використаємо теорему про зміну кількості руху за час  $t$  переміщення точки з положення  $O$  в положення  $C$  послідовно у проекціях на осі  $x$  і  $y$ .

$$mV_x - mV_{0x} = S_x, \quad (2.5)$$

де  $V_x = V_C \cos \beta; V_{0x} = V_0 \cos \alpha; S_x = P_x t = 0.$  (2.6)

Підставимо вирази (2.6) в рівняння (2.5). Будемо мати

$$V_c \cos \beta = V_0 \cos \alpha. \quad (2.7)$$

$$mV_y - mV_{0y} = -Pt, \quad (2.8)$$

де  $V_y = -V_C \sin \beta, V_{0y} = V_0 \sin \alpha, P = mg.$  (2.9)

Підставимо вирази (2.9) в рівняння (2.8). Будемо мати

$$-V_c \sin \beta - V_0 \sin \alpha = -gt. \quad (2.10)$$

Складемо рівняння (2.7) і (2.10),

тоді

$$V_0(\sin \alpha - \cos \alpha) + V_c(\sin \beta + \cos \beta) = gt, \quad (2.11)$$

із рівняння (2.7) виходить

$$V_c = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} V_0. \quad (2.12)$$

Підставимо рівняння (2.12) в формулу (2.11). Тоді

$$V_0 \sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \sin \beta V_0 = gt,$$

або

$$V_0 \sin \alpha + V_0 \cos \alpha \operatorname{tg} \beta = gt,$$

відкіля

$$V_0 (\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \beta) = -gt. \quad (2.13)$$

Із рівняння (2.13) при  $t = 2V_0 \cdot \sin 2 / g$ , виходить

$$\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \beta = 2 \sin \alpha.$$

Таким чином,

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha \quad \text{і} \quad \beta = -\alpha. \quad (2.14)$$

Із рівняння (2.7) відповідно до рівняння (2.14) виходить  $V_c = V_0$ .

Важливі застосування теореми про зміну кількості руху знаходимо в гідромеханіці, теорії удару і при визначенні реактивного руху. Практична цінність теореми полягає в тому, що вона дозволяє виключити із розгляду наперед невідомі внутрішні сили (наприклад, сили тиску одна на одну частинок рідини). Користуючись цією теоремою можна створити загальне рівняння динаміки суцільного середовища.

Розглянемо застосування теореми в гідромеханіці на такому прикладі.

По трубі, вісь якої розміщена в горизонтальній площині  $xOy$ , і прямолінійні частини якої утворюють кут  $150^\circ$  (рис.2.3), тече вода з швидкістю

$$V = 6 \text{ м/с}.$$

Переріз труби має вигляд круга діаметром 10 см. Визначити повну реакцію стінок труби у місці її зміни напрямку (точка  $O$ ).

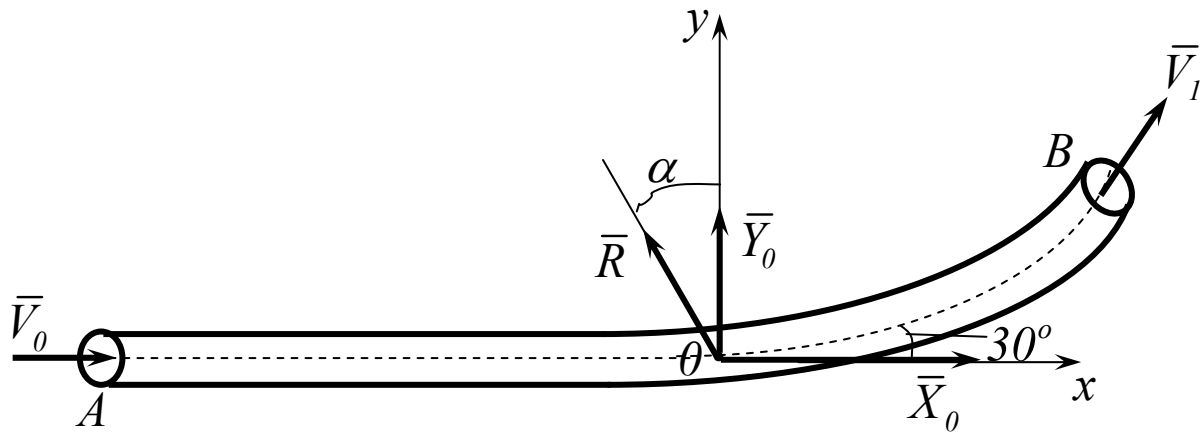


Рисунок 2.3

### Рішення

Зовнішньою силою для частинок води, які рухаються вздовж труби, є сили ваги, перпендикулярні до площини  $xOy$ , а внутрішніми силами – реакції стінок труби, складовими якої в площині  $xOy$  є  $\bar{X}_0$  та  $\bar{Y}_0$ .

Запишемо теорему про зміну кількості руху механічної системи частинок води у проекціях на осі  $x, y$ :

$$\begin{aligned} m V_1 \cos 30^\circ - m V_0 &= X_0 t, \\ m V_1 \sin 30^\circ &= Y_0 t. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Так як  $V_0 = V_1 = V$ , а маса рідини, якщо проходить через поперечний переріз труби за час  $t$  дорівнює:

$$m = \rho \frac{\pi d^2}{4} V t, \quad (2.16)$$

де  $\rho$  – густина води, то з (2.15) і (2.16) матимемо:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\pi d^2}{4} V^2 (\cos 30^\circ - 1) &= X_0, \\ \rho \frac{\pi d^2}{4} V^2 \sin 30^\circ &= Y_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Підставивши в (2.17) числові дані умови задачі та значення

$\rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ , одержимо проекції реакції на осі координат:

$$X_0 = -37,86 \text{ Н}, \quad Y_0 = 141,3 \text{ Н}.$$

Сила додаткового динамічного тиску на трубопровід

$$R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} = 146,28 \text{ Н}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{X_0}{Y_0} = 0,268, \quad \alpha = 15^\circ.$$

Отже повна реакція буде напрямлена за бісектрисою кута  $AOB$ .

Розглянемо ще один приклад використання теорем про зміну кількості руху при розв'язанні задач гідромеханіки.

Струмінь води витікає зі швидкістю  $\bar{V}_0$  із труби діаметра  $d$  на нескінчену стінку, площа якої з напрямом струменя утворює кут  $\alpha$  (рис. 2.4).



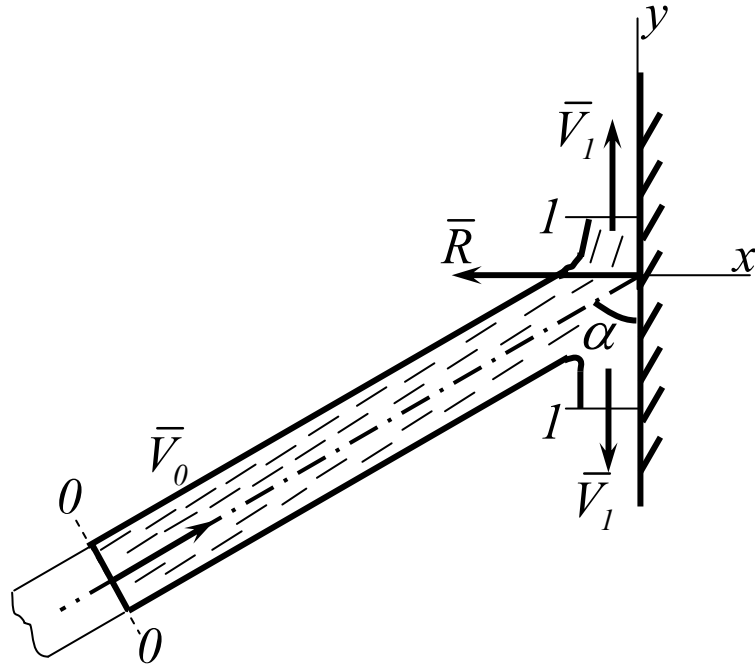


Рисунок 2.4

Нехтуючи дією сили ваги на форму струменя і вважаючи, що частини рідини після зустрічі зі стіною рухаються вздовж стіни, визначити силу динамічного тиску струменя води на стіну.

### Рішення

При розв'язанні цієї задачі змінимо форму запису теореми про зміну руху механічної системи на таку

$$d\bar{Q} = \bar{R}^e dt, \quad (2.18)$$

$$\bar{R}^e = \bar{R}_0 + \bar{R}_n. \quad (2.19)$$

де  $\bar{R}^e$  – зовнішні сили, які діють на об'єм рідини;

$\bar{R}_0$  – об'ємні або масові сили, що діють на всі частини об'єму (наприклад, сили ваги);

$\bar{R}_n$  –поверхневі сили, що діють лише на частинки, розміщені на поверхні даного об'єму (наприклад, сили тертя об стінки труби ).

При усталеній течії рідини, коли швидкість  $\bar{V}$  її часток, тиск  $P$  і густина  $\rho$  не змінюються, через будь-який поперечний переріз труби з площею  $\sigma$  за  $1$  с протікає однакова кількість маси рідини.

$$m_c = \rho\sigma V, \quad (2.20)$$

де  $V$  – середня швидкість рідини в даному перетині,

$m_c$  – секундна масова витрата рідини.

Зміна кількості руху системи частинок рідини яка за час  $dt$  проходить через перерізи  $0-0$  і  $1-1$  дорівнює різниці кількостей руху:

$$d\bar{Q} = m_c \bar{V}_1 dt - m_c \bar{V}_0 dt. \quad (2.21)$$

Таким чином, теоремі про зміну кількості руху в даному випадку можна надати вигляду

$$m(\bar{V}_1 - \bar{V}_0)dt = (\bar{R}_0 + \bar{R}_n)dt, \quad (2.22)$$

або

$$m\bar{V}_0 - m\bar{V}_1 + \bar{R}_0 + \bar{R}_n = 0. \quad (2.23)$$

Рівність (2.24) становить теорему Ейлера. Застосовуючи теорему Ейлера в проекції на вісь  $X$  (вісь струменя), Д.Бернуллі у 1736 році вперше довів свою формулу, яка має більш простіший вигляд

$$R = mV_0. \quad (2.24)$$

Ця формула записана Бернуллі до випадку, коли стінка перпендикулярна до напрямку струменя.

Враховуючи, що в розглядуваному прикладі зовнішньою силою є реакція  $\bar{R}$  стіни, спроектуємо обидві частини виразу (2.22) на горизонтальну вісь  $X$ :

$$m_c (V_{1x} - V_{0x}) = R_x. \quad (2.25)$$

Так, як  $V_{1x} = 0$ ,  $V_{0x} = V_0 \sin \alpha$ , а  $R_x = -R$ , одержимо:

$$m_c V_0 \sin \alpha = R. \quad (2.26)$$

Виражаючи секундну масову витрату рідини формулою (2.20) з врахуванням площі поперечного перерізу труби:

$$m_c = \rho \frac{\pi d^2}{4} V_0, \quad (2.27)$$

будемо мати:

$$R = \rho \frac{\pi d^2}{4} V_0^2 \sin \alpha.$$

### 2.1.2 Використання окремих випадків із теореми при розв'язанні задач. Закони збереження кількості руху

Закони збереження кількості руху випливають із теореми про зміну кількості руху, як окремі випадки.

1. Якщо сума імпульсів усіх зовнішніх сил механічної системи дорівнює нулю, то з рівності (2.1), яка буде представлена в вигляді

$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = 0$ , виходить, що вектор кількості руху системи є сталим.

$$\bar{Q}_1 = \bar{Q}_0 = \overline{const} \quad (2.28)$$

2. Якщо зовнішні сили діють на систему таким чином, що сума проєкцій їх імпульсів в проєкції на деяку вісь дорівнює нулю, то проєкція кількості руху системи на цю вісь залишається незмінною за величиною.

Нехай, наприклад,  $\sum_{i=1}^N S_{ix}^e = 0$ , тоді:

$$Q_x = const. \quad (2.29)$$

Закон збереження кількості руху широко використовується в тих випадках, коли за відомою зміною поступальної швидкості одного із тіл механічної системи знаходять зміну швидкості інших тіл системи. Виконання закону збереження кількості руху спрощує розв'язання таких задач.

Розглянемо такий приклад.

На горизонтальній платформі вагою  $\bar{P}_1$  встановлено похилу площину  $AB$ , яка утворює з горизонтом кут  $\alpha$  (рис. 2.5). По цій площині за допомогою лебідки піднімається вантаж  $A$  вагою  $\bar{P}_2$  так, що відстань

$OA$  змінюється за законом  $S = \frac{1}{2}at^2$ , де  $a$  – прискорення вантажу, а  $t$

– час. При цьому вантаж  $B$  вагою  $\bar{P}_3$  опускається. Радіуси барабанів лебідки  $r$  і  $R$ . У початковий момент система знаходилась в стані спокою.

Визначити швидкість, з якою буде рухатись платформа, нехтуючи опором.

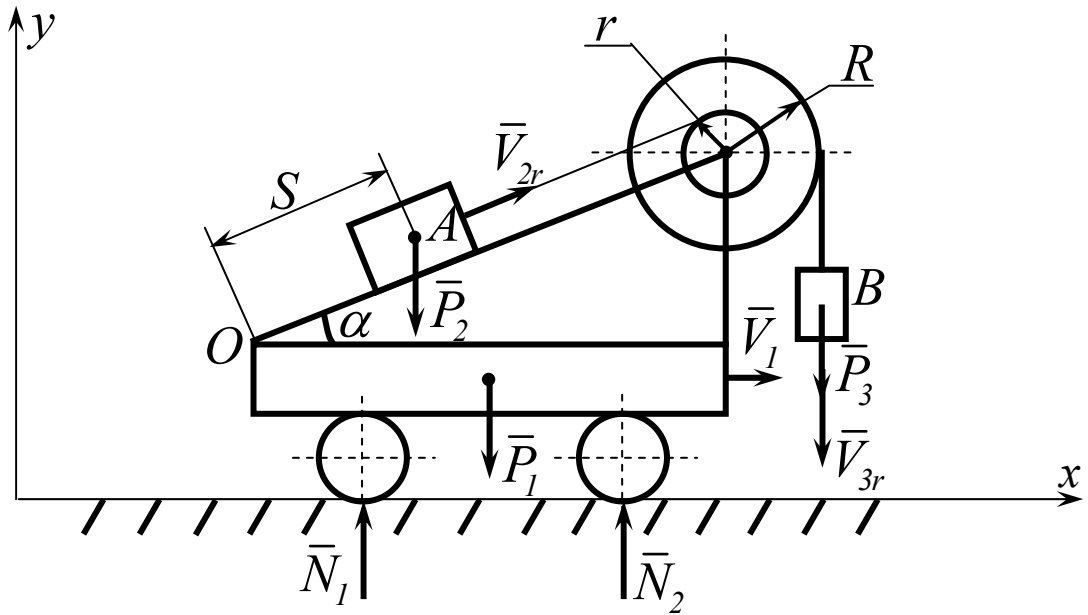


Рисунок 2.5

### Рішення

Так, як діючи на систему трьох тіл зовнішні сили (сили ваги  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$  та реакції  $\bar{N}_1, \bar{N}_2$ ) вертикальні (рис. 2.5), то сума їх проекцій на горизонтальну вісь дорівнює нулю, тобто виконується закон збереження кількості руху системи вздовж осі  $x$   $Q_x = const.$

Враховуючи, що в початковий момент система була нерухомою, встановимо, що кількість руху системи вздовж осі  $x$  весь час дорівнює нулю, тобто:

$$\frac{P_1}{g} V_{1x} + \frac{P_2}{g} V_{2x} + \frac{P_3}{g} V_{3x} = 0, \quad (2.30)$$

де  $V_{1x}, V_{2x}, V_{3x}$  – проекції на вісь  $x$  абсолютних швидкостей платформи та вантажів.

Вантажі  $A$  і  $B$  здійснюють складний рух рухаючись разом з платформою та відносно платформи. Вектор відносної швидкості вантажу

$A$  направлений паралельно похилій площині і чисельно дорівнює:

$$V_{2r} = \frac{dS}{dt} = at.$$

Відносна швидкість вантажу  $B$  :

$$V_{3r} = V_{2r} \frac{R}{r} = at \frac{R}{r},$$

але направлений вектор  $\bar{V}_{3r}$  вертикально, і проекція вектора цієї швидкості на вісь  $X$  дорівнює нулю.

Позначивши швидкість платформи як  $\bar{V}_1$ , будемо мати:

$$V_{1x} = V_1; \quad V_{2x} = V_1 + at \cdot \cos\alpha; \quad V_{3x} = V_1.$$

Тоді рівняння (2.30) запишеться у вигляді:

$$\frac{P_1}{g} V_1 + \frac{P_2}{g} (V_1 + at \cdot \cos\alpha) + \frac{P_3}{g} V_1 = 0.$$

Звідси знаходимо:

$$V_1 = - \frac{P_2}{P_1 + P_2 + P_3} at \cdot \cos\alpha.$$

Знак “-” вказує, що платформа буде рухатися вліво.

### 2.1.3 Застосування теорем в диференціальній формі

Теорема про зміну кількості руху в диференціальній формі має такий вигляд:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_i \bar{F}_i^e, \quad (2.31)$$

де  $\bar{Q}$  – кількість руху механічної системи;

$\sum_i \bar{F}_{ix}^e$  – головний вектор зовнішніх сил, діючих на систему.

Проектуючи це векторне рівняння на координатні осі, одержимо

$$\begin{aligned} \frac{dQ_x}{dt} &= \sum_i F_{ix}^e; \\ \frac{dQ_y}{dt} &= \sum_i F_{iy}^e; \\ \frac{dQ_z}{dt} &= \sum_i F_{iz}^e. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Розглянемо приклад, що ілюструє використання теореми про зміну руху в диференціальній формі відповідно рівнянням (2.32).

На горизонтальному фундаменті встановлений електричний двигун вагою  $P_1$ . Вага ротора двигуна  $P_2$ , а його центр ваги за рахунок різноманітних недоліків складання та виготовлення двигуна зміщено відносно осі обертання на деяку відстань  $C_1C_2 = l$ . Ротор обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  (рис. 2.6). До початку обертання ротора двигун був нерухомим.

Визначити:

1 Залежності швидкості двигуна  $V_1$  від кута повороту  $\varphi$  ротора та рівняння горизонтального руху двигуна, поставленого вільно на фундаменті у випадку відсутності тертя між поверхнями фундаменту і двигуна.

2 Рівняння горизонтального руху двигуна, поставленого вільно на жорсткому фундаменті із врахуванням сили тертя.

3 Найбільший горизонтальний тиск на болти, якщо двигун закріплено на фундаменті.

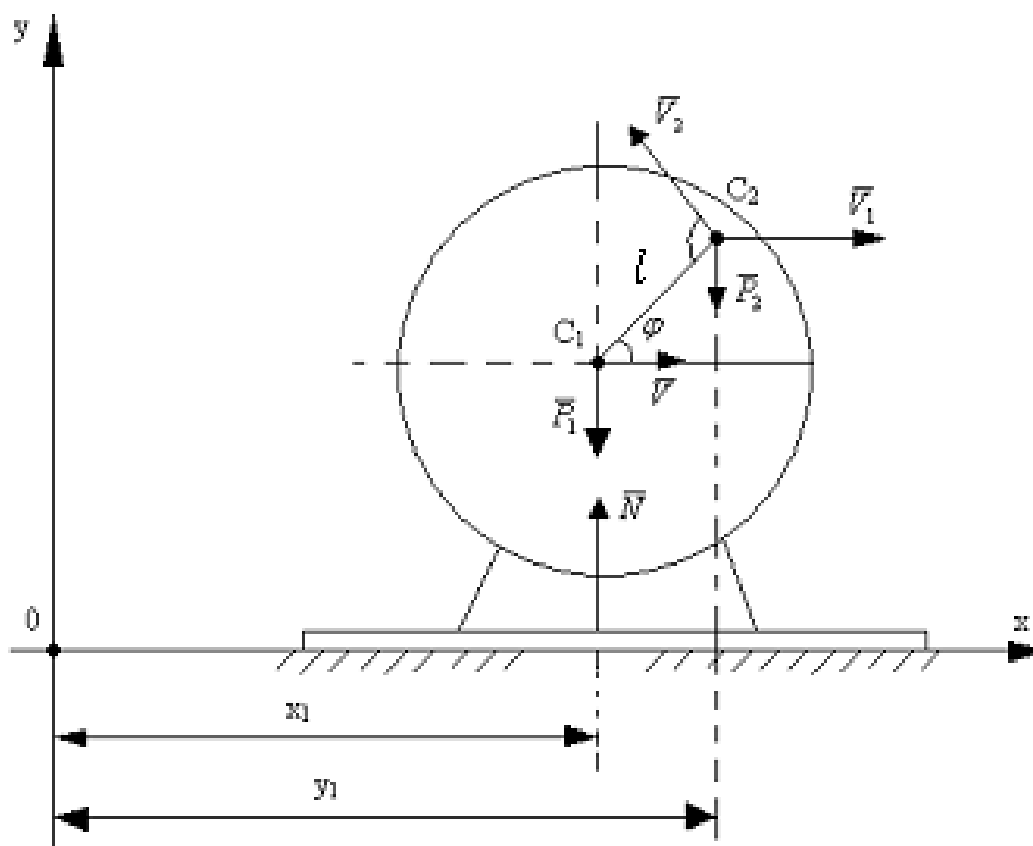


Рисунок 2.6

**Рішення**

1. Кількість руху системи, яка складається з двигуна масою  $m_1 = \frac{P_1}{g}$

та ротора масою  $m_2 = \frac{P_2}{g}$  буде:

$$\bar{Q} = m_1 \bar{V}_1 + m_2 (\bar{V}_1 + \bar{V}_2), \quad (2.33)$$



де  $\bar{V}_1$  – швидкість двигуна;

$\bar{V}_2$  – швидкість центра мас ротора відносно двигуна.

Зовнішні сили ваги  $\bar{P}_1$  і  $\bar{P}_2$  та нормальна реакція  $\bar{N}$  гладенької поверхні вертикальні, тому теорема про зміну кількості руху в проекції на вісь  $X$  буде такою:

$$\frac{dQ_x}{dt} = 0, \text{ або } Q_x = \text{const.}$$

Враховуючи, що відповідно до початкових умов  $Q_0 = 0$ , а також  $Q_{x_0} = 0$ , то проектуючи векторне рівняння (2.33) на вісь  $X$ , одержимо:

$$m_1 V_1 + m_2 V_1 - m_2 V_2 \sin \varphi = 0. \quad (2.34)$$

Так як  $V_2 = l\omega$ , а  $\varphi = \omega t$ , то рівняння (2.34) прийме вигляд:

$$(P_1 + P_2)V_1 - P_2 l \omega \sin \omega t = 0.$$

Звідси одержимо:

$$V_1 = \frac{P_2 l \omega}{P_1 + P_2} \sin \omega t. \quad (2.35)$$

Рівняння горизонтального руху двигуна на гладенькій поверхні фундаменту може бути отримане шляхом інтегрування рівняння (2.35) за допомогою підстановки

$$V_1 = dx_1 / dt.$$

Запишемо кінцевий результат

$$x_1 = \frac{P_2 l}{P_1 + P_2} \cos \omega t.$$

2. Для визначення рівняння горизонтального руху двигуна з урахуванням сили тертя на фундаменті необхідно звернутися до рисунка 2.7, який відрізняється від попереднього (рис. 2.6) присутністю сили тертя на поверхні фундаменту ( $\bar{F}_T$ ).

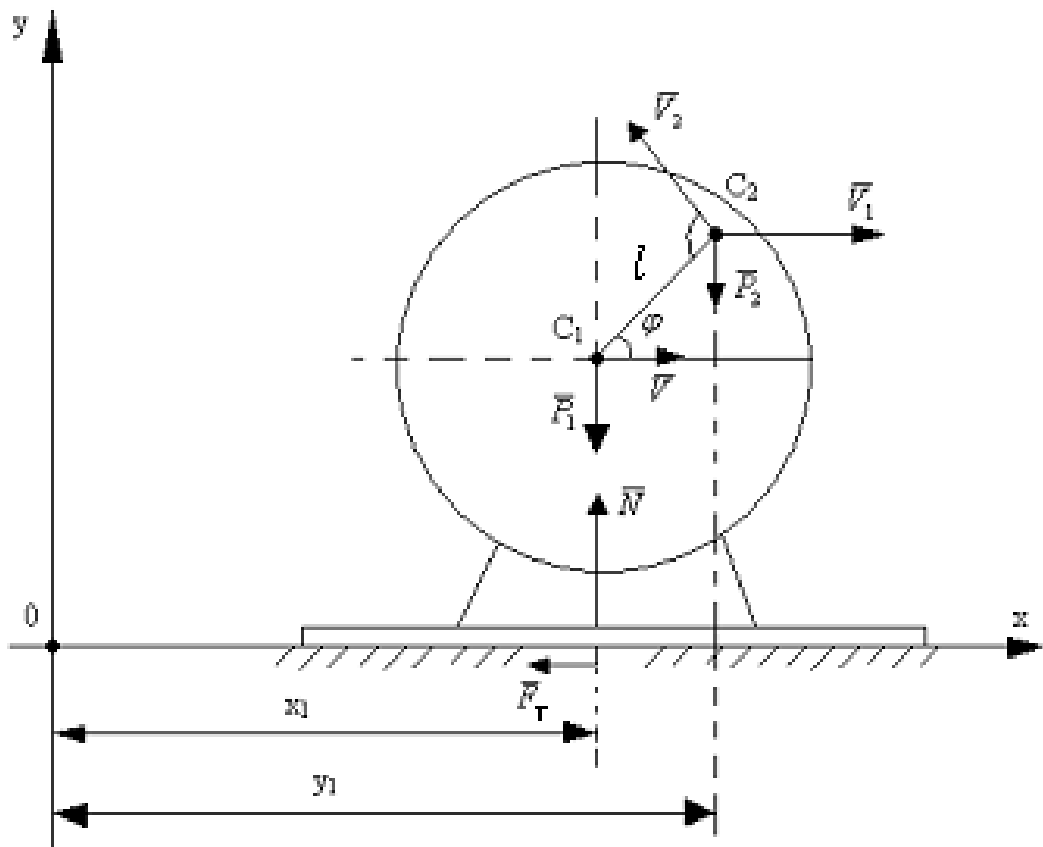


Рисунок 2.7

За допомогою розрахункової схеми (див. рис. 2.7) запишемо послідовно наступні рівняння:

$$\frac{dQ_x}{dt} = -F_T, \quad (2.36)$$

$$F_T = fN,$$

де  $f$  – коефіцієнт тертя.

Запишемо ліву частину рівняння (2.36)

$$\frac{dQ_x}{dt} = (m_1 + m_2)\dot{V}_1 - m_2 l \omega^2 \cos\varphi, \quad (2.37)$$

де  $\dot{V}_1 = a_1$  і  $\varphi = \omega t$ .

Запишемо рівняння (див. 2.36) в остаточному вигляді

$$(P_1 + P_2)a_1 - P_2 l \omega^2 \cos\omega t = -fgN,$$

звідки

$$a_1 = \frac{P_2 l \omega^2 \cos\omega t - fgN}{P_1 + P_2}. \quad (2.38)$$

Для визначення невідомої нормальної реакції  $N$  у рівнянні (2.38) необхідно записати теорему у проекції на ось  $Y$ .

$$\frac{dQ_y}{dt} = N - P_1 - P_2, \quad (2.39)$$

де  $Q_y = m_2 V_2 \cos\varphi = \frac{P_2 l}{g} \omega \cos\omega t,$

$$\frac{dQ_y}{dt} = \frac{P_2 l}{g} \omega^2 \sin \omega t. \quad (2.40)$$

Із рівнянь (2.39 і 2.40) маємо:

$$N = P_2 + P_2 + \frac{P_2 l \omega^2}{g} \sin \omega t. \quad (2.41)$$

Підставимо значення  $N$  в рівняння (2.38). Тоді

$$a_1 = \frac{P_2 l \omega^2}{P_1 + P_2} (\cos \omega t + f \sin \omega t) - fg. \quad (2.42)$$

Остаточний результат досягається послідовним інтегруванням рівняння (2.42) з допомогою двох послідовних підстановок:

$$a_1 = \frac{dV_1}{dt}; \quad \text{і} \quad V_1 = \frac{dx_1}{dt}.$$

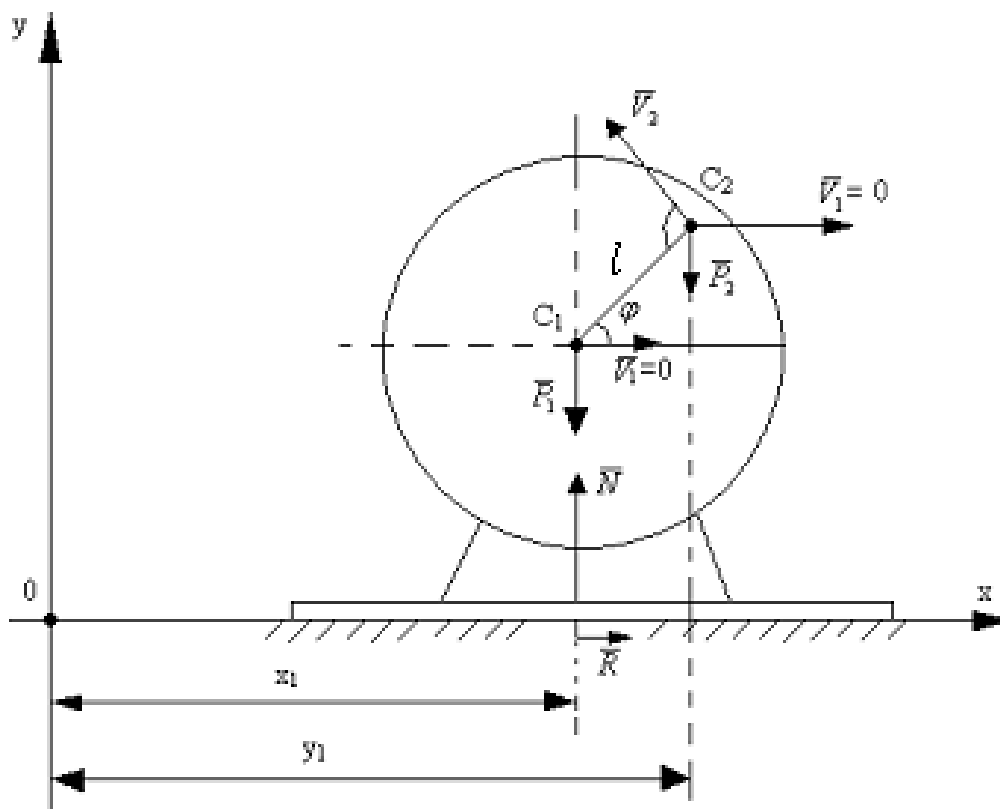


Рисунок 2.8

3. Для визначення горизонтального тиску на болти звернемося до рисунка 2.8, виконаємо наступні послідовні записи:

$$\frac{dQ_x}{dt} = R. \quad (2.43)$$

$$\bar{Q} = m\bar{V}_2, \quad Q_x = -m_2 V_2 \sin \omega t.$$

Запишемо ліву частину рівняння (2.43):

$$\frac{dQ_x}{dt} = -m_2 l \omega^2 \cos \omega t = -\frac{P_2 l \omega^2}{g} \cos \omega t, \quad (2.44)$$

Із рівнянь (2.43) і (2.44) визначимо модуль сили тиску на болти

$$R = \frac{P_2 l \omega^2}{g} \cos \omega t. \quad (2.45)$$

Усі задачі наведеного прикладу можливо розв'язати також за допомогою теореми про зміну кількості руху системи в кінцевій (інтегральній) формі.

## 2.2 Теорема про рух центра мас. Наслідки теореми

Центр мас системи або центр інерції є геометрична точка, положення якої визначається радіусом – вектором

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \bar{r}_i}{M}, \quad (2.46)$$

де  $m_i$  – маса  $i$ -ї точки;

$\bar{r}_i$  – радіус – вектор  $i$ -ї точки;

$M$  – маса системи.

Положення центра мас характеризує розподіл мас в системі. Якщо рівняння (2.46) продиференціювати двічі та помножити на  $M$ , то отримаємо таке рівняння

$$M \bar{a}_c = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i^e, \quad (2.47)$$

яке відоме в класичній механіці як теорема про рух центра мас.

Ця теорема в класичній механіці має дуже велике значення, бо вона дає змогу звести задачі механічної системи до задачі динаміки точки, що значно спрощує вирішення задач. Розв'язання задач системи за допомогою

цієї теореми розглядається як розв'язання першої або другої задачі динаміки точки, яка береться як центр мас системи з масою усієї системи. Крім того, до центра мас прикладаються всі зовнішні сили, які діють на механічну систему.

При розв'язанні задач за допомогою теореми про рух центра мас на основі рівняння (2.47) у векторній формі записують наступні диференціальні рівняння у проекціях на осі координат:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_c &= \sum_{i=1}^N F_{ix}^e; \\ M\ddot{y}_c &= \sum_{i=1}^N F_{iy}^e; \\ M\ddot{z}_c &= \sum_{i=1}^N F_{iz}^e. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Складання і розв'язання таких диференціальних рівнянь розглядалося у розділі “Динаміка точки”.

Друга цінність цієї теореми є в її наслідках або в часткових випадках, які ілюструють закони природи с одного боку, а з іншого – виступають як методи розв'язання різноманітних задач.

Розглянемо часткові випадки теореми.

Головний вектор зовнішніх сил дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{i=1}^N \bar{F}_i^e = 0,$$

то відповідно рівнянню (2.47)

$$\bar{a}_c = 0. \quad (2.49)$$

Отже, швидкість центра мас є сталою величиною за модулем і напрямом, тобто

$$\overline{V}_c = \overline{const.} \quad (2.50)$$

Цей результат виражає закон збереження руху центра мас системи.

1. Коли в початковий момент часу швидкість центра мас дорівнює нулю, тобто

$$\overline{V}_c = 0. \quad (2.51)$$

то положення центра мас не змінюється з часом, тобто

$$\overline{r}_c = \overline{const.} \quad (2.52)$$

Якщо записати  $\overline{r}_c$  в різні моменти часу, наприклад,

$$\overline{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \overline{r}_i}{M}, \quad \text{в момент часу } t,$$

$$i \quad \overline{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i (\overline{r}_i + \Delta \overline{r}_i)}{M} \quad \text{в момент часу } t + \Delta t,$$

то із двох рівнянь слід визначити таке:

$$\sum_{i=1}^N m_i \Delta \overline{r}_i = 0. \quad (2.53)$$

2. Якщо, проекція головного вектора зовнішніх сил на будь-яку вісь, наприклад  $X$ , дорівнює нулю, то



$$\dot{x}_c = 0. \quad (2.54)$$

І послідовно при відповідних умовах:

$$\dot{x}_c = const;$$

$$\dot{x}_c = 0;$$

$$x_c = const;$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \Delta x_i = 0. \quad (2.55)$$

Наведемо деякі приклади, що ілюструють використання закону збереження руху центра мас.

1. Реактивний рух.
2. Рух центра мас Сонячної системи.
3. Дія пари сил на тверде тіло.
4. Рух тіл по поверхні.
5. Робота гребного гвинта.
6. Відбій при пострілі.

Розглянемо деякі приклади розв'язання задач за допомогою рівнянь часткових випадків.

1 Визначимо рівняння горизонтального руху двигуна за допомогою розрахункової схеми, наведеної на рисунку 2.6.

Із схеми виходить:

$$\sum_{i=1}^N \bar{F}_{ix}^e = 0,$$

Відкіля  $M\ddot{x}_c = 0, \quad \ddot{x}_c = 0,$

де 
$$\ddot{x}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \ddot{x}_i}{M}.$$

Тут 
$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{x}_i = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2,$$

де 
$$x_2 = x_1 + l \cos \varphi, \text{ або } x_2 = x_1 + l \cos \omega t.$$

Таким чином 
$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 - l \omega^2 \cos \omega t,$$

і 
$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_1 - m_2 l \cos \omega^2 t = 0,$$

відкіля 
$$\ddot{x}_1 = \frac{P_2 l \omega^2}{P_1 + P_2} \cos \omega t. \quad (2.56)$$

Подальше рішення задачі полягає у інтегруванні рівняння (2.56).

2 У центрі мас  $C_1$  кранового візка масою  $M_1$  підвішений трос довжиною  $l$  з прив'язаним вантажем  $C_2$  і масою  $M_2$  (рис. 2.9).

В початковий момент часу, коли візок знаходився в стані спокою, трос з вантажем почав здійснювати гармонічні коливання в вертикальній площині з початкового вертикального положення. Визначити горизонтальне переміщення кранового візка при коливаннях троса з вантажем.

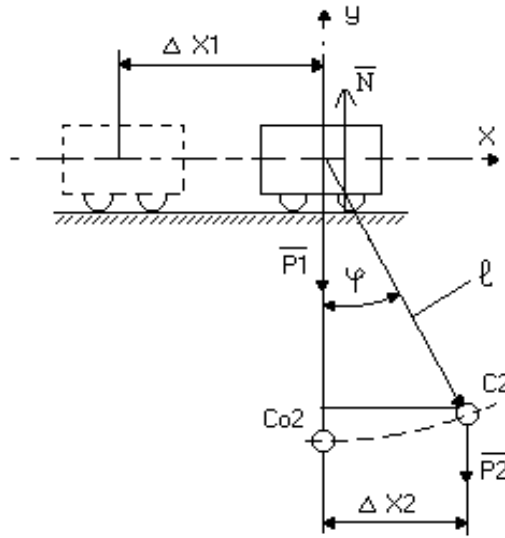


Рисунок 2.9

### Рішення

Відповідно розташування сил (рис. 2.9):

$$\sum_{i=1}^N F_{ix}^e = 0.$$

Враховуючи, що в початковий момент система нерухома, тобто  $\dot{x}_{C_0} = 0$ , встановлюємо виконання закону збереження положення центру мас системи на горизонтальній осі  $x$ :

$$x_C = const.$$

У цьому випадку справедливе рівняння (2.55), складаючи яке відповідно до схеми (рис. 2.9), одержимо:

$$M_2(\Delta x_2 - \Delta x_1) - M_1 \Delta x_1 = 0, \quad (2.57)$$

де  $(\Delta x_2 - \Delta x_1)$  – загальне переміщення маси  $M_2$ ; вздовж осі  $x$ ;

$\Delta x$  – переміщення маси  $M_1$  (відхилення кранового візка).

Враховуючи, що  $\Delta x_2 = \ell \sin\varphi$ , перепишемо рівняння (2.57)

$$M_2 \ell \sin\varphi - (M_1 + M_2) \Delta x_1 = 0,$$

відкіля

$$\Delta x_1 = \frac{M_2 \ell}{M_1 + M_2} \sin\varphi.$$

Подібно наведеному прикладу можливо визначити переміщення плаваючого крана, який піднімає вантаж поворотом стріли, переміщення не устанвленого на гальма самоскиду, при повороті кузова, що розвантажується й т.п.

Теорема про рух центра мас механічної системи дає також змогу визначити реакції в'язей, накладених на систему.

Наведемо наступний приклад.

В кривошипно-шатунному механізмі двигуна внутрішнього згорання (рис. 2.10) кривошип  $OA$  масою  $m_1$ , який обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ , приводить до руху шатун  $AB$  масою  $m_2$  і поршень  $B$  масою  $m_3$ . Довжини кривошипа і шатуна однакові, тобто  $OA = AB = l$ . На поршень при його русі діє постійна сила  $Q$ . Нехтуючи тертям, визначити найбільший горизонтальний тиск на вісь  $O$  кривошипа.

### **Рішення**

Відповідно теоремі про рух центра мас:

$$M \ddot{x}_c = X_0 - Q,$$

звідси

$$X_0 = Q + M \ddot{x}_c,$$

де 
$$M = m_1 + m_2 + m_3. \quad (2.58)$$

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \quad (2.59)$$

$$x_1 = \frac{l}{2} \cos \omega t, \quad x_2 = \frac{3}{2} l \cos \omega t, \quad x_3 = 2 l \cos \omega t. \quad (2.60)$$

Координати центрів мас  $C_1$ ,  $C_2$  і  $C_3$  в формулах (2.60) записані за рисунком 2.10.

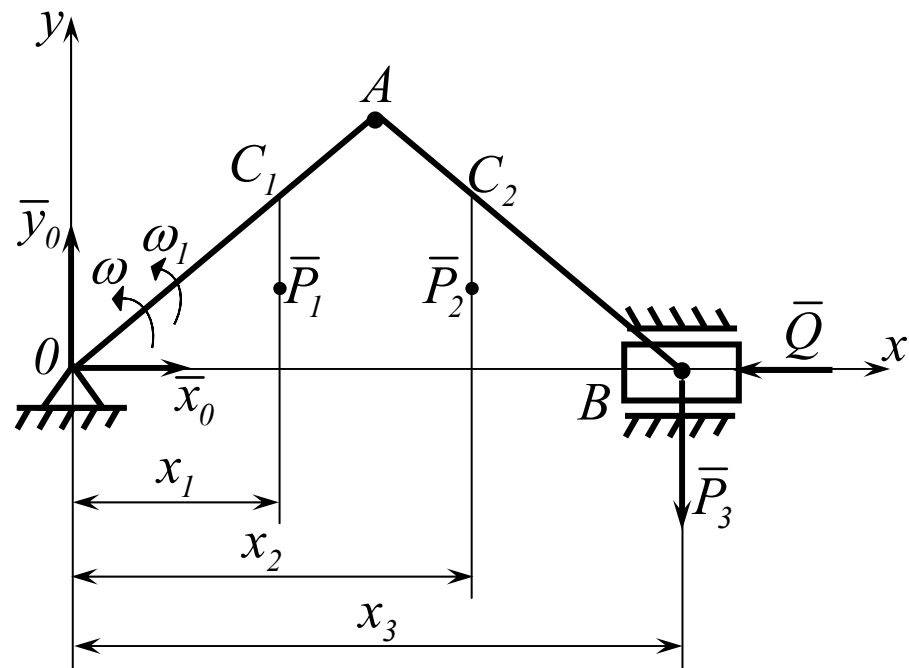


Рисунок 2.10

Уведемо їх значення до формули (2.59).

Отримаємо:

$$x_c = \frac{0,5m_1 + 1,5m_2 + 2m_3}{m_1 + m_2 + m_3} l \cdot \cos\omega t,$$

$$\ddot{x}_c = -\frac{0,5m_1 + 1,5m_2 + 2m_3}{m_1 + m_2 + m_3} l\omega^2 \cos\omega t. \quad (2.61)$$

відкіля

Підставимо результат (2.61) в рівняння (2.58)

$$x_0 = Q - \frac{0,5m_1 + 1,5m_2 + 2m_3}{m_1 + m_2 + m_3} l\omega^2 \cos\omega t, \quad (2.62)$$

З формули (2.62) виходить, що найбільший горизонтальний тиск  $X_0(max)$  на вісь кривошипа буде при  $\varphi = \omega t = 180^0$  і складе

$$x_{0(max)} = Q + \frac{0,5m_1 + 1,5m_2 + 2m_3}{m_1 + m_2 + m_3} l\omega^2.$$

### 2.3 Теорема про зміну кінетичного моменту матеріальних об'єктів

Теорема про зміну кінетичного моменту при розв'язанні задач використовується в кінцевій (інтегральній) і в диференціальній формах. Запишемо їх послідовно:

$$K_z - K_{z0} = \sum_{i=1}^N m_z (\bar{S}_i^e). \quad (2.63)$$

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{i=1}^N m_z(\bar{F}_i^e), \quad (2.64)$$

де  $K_z$  – кінетичний момент системи в кінцевий момент часу відносно осі  $Z$  ;

$K_{z0}$  – кінетичний момент системи відносно осі  $Z$  в початковий момент часу,

$\sum_{i=1}^N m_z(\bar{S}_i^e)$  – головний момент імпульсу зовнішніх сил відносно осі  $Z$  ;

$\sum_{i=1}^N m_z(\bar{F}_i^e)$  – головний момент зовнішніх сил відносно осі  $Z$  .

### 2.3.1 Застосування теореми у кінцевій (інтегральній) формі

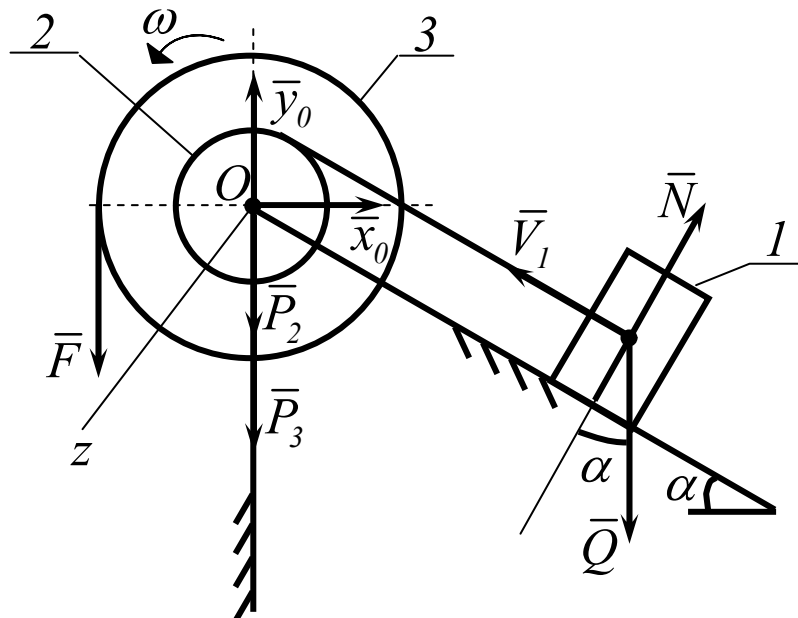


Рисунок 2.11

Два блоки вагою  $\bar{P}_2$  і  $\bar{P}_3$  і радіусами відповідно  $r$  і  $R$  жорстко скріплені між собою і насаджені на спільну вісь  $O$  (рис. 2.11). На кожний з них намотано трос. До кінця троса, намотаного на блок радіуса  $r$ , прикріплено вантаж 1 вагою  $\bar{Q}$ , розміщений на гладенькій похилій площині, нахилений під кутом  $\alpha$  до горизонту. До кінця другого троса прикладемо постійну силу  $\bar{F}$ . Нехтуючи тертям і вагою троса, визначити прискорення вантажу  $l$ , вважаючи блоки однорідним дисками і враховуючи, що в початковий момент часу система була нерухома.

### Рішення

Для розв'язання задачі застосуємо рівняння (2.63). Кінетичний момент системи відносно осі  $Z$  в кінцевий момент часу  $t$ , коли кінцева кутова швидкість блоків мала значення  $\omega$  знайдемо як суму кінетичних моментів тіл системи.

$$K_z = K_{z_1} + K_{z_2} + K_{z_3}, \quad (2.65)$$

де  $K_{z_1}, K_{z_2}, K_{z_3}$  – кінетичні моменти відносно осі  $Z$  відповідно вантажу 1, блоків 2 і 3.

Кінетичний момент вантажу, здійснюючого поступальний рух, знайдемо як момент відносно осі  $Z$  його кількості руху  $m_1 \bar{V}_1$ .

$$K_{z_1} = m_z (m_1 \bar{V}_1) = m_1 V_1 \cdot r = \frac{Q}{g} r^2 \omega, \quad (2.66)$$

так як  $V_1 = \omega \cdot r$ .

Кінетичний момент блока 2 :



$$K_{z_2} = J_{z_2} \omega = 0,5 \frac{P_2}{g} r^2 \omega, \quad (2.67)$$

так як момент інерції блока 2  $J_2 = 0,5 m_2 r^2 = 0,5 \frac{P_2}{g} r^2$ .

Кінематичний момент блока 3 :

$$K_{z_3} = J_{z_3} \omega = 0,5 \frac{P_3}{g} R^2 \omega, \quad (2.68)$$

так як момент інерції блока 3  $J_3 = 0,5 m_3 R^2 = 0,5 \frac{P_3}{g} R^2$ .

Результати (2.66...2.68) введемо до формули (2.65).

$$K_z = \frac{(2Q + P_2)r^2 + P_3R^2}{2g} \omega. \quad (2.69)$$

Початковий кінетичний момент системи дорівнює нулю, тобто

$$K_{z0} = 0. \quad (2.70)$$

Запишемо ліву частину рівняння (2.63)

$$K_z - K_{z0} = \frac{(2Q + P_2)r^2 + P_3R^2}{2g} \omega. \quad (2.71)$$

Запишемо праву частину рівняння (2.63)

$$\sum_{i=1}^N m_z (\bar{S}_i^e) = (FR - Q \sin \alpha) t. \quad (2.72)$$

Порівняємо рівняння (2.71) та рівняння (2.72) і вирішимо отримане рівняння відносно  $\omega$ :

$$\omega = \frac{2(FR - Qr \sin \alpha)}{(2Q + P_2)r^2 + P_3R^2} g t. \quad (2.73)$$

Аналіз (2.73) показує, що кутова швидкість блоків змінюється за законом рівнозмінного обертального руху, тому кутове прискорення визначається за формулою:

$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t}$ , тобто при значенні  $\omega_0 = 0$ , маємо:

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{2(FR - Qr \cdot \sin \alpha)}{(2Q + P_2)r^2 + P_3R^2} g.$$

Тоді прискорення вантажу  $l$ :

$$a = \varepsilon r = \frac{2(FR - Qr \cdot \sin \alpha) r}{(2Q + P_2)r^2 + P_3R^2} g. \quad (2.74)$$

Як показує результат (див. 2.74) при  $\alpha = 0$  (площина горизонтальна) прискорення вантажу є найбільшим. При  $\alpha = 90^\circ$  (площина вертикальна) прискорення вантажу є найменшим.

### 2.3.2 Застосування теореми в диференціальній формі

Попередній приклад також можна розв'язати, застосувавши теорему про зміну кінетичного моменту системи, відповідно до рівняння (2.64), в диференційній формі.

Для цього обчислимо наведеним в попередньому прикладі шляхом кінетичний момент системи.

$$K_z = \frac{(2Q + P_2)r^2 + P_3R^2}{2g} \omega.$$

Отриманий результат співпадає з результатом (2.69), тільки треба враховувати, що  $\omega$  – це не кінцева, як в попередньому прикладі, а поточна кутова швидкість блоків в деякий (а не кінцевий) момент часу  $t$ .

Тоді похідна за часом від кінетичного моменту в рівнянні (2.64) буде мати значення:

$$\frac{dK_z}{dt} = \frac{(2Q + P_2)r^2 + P_3R^2}{2g} \dot{\omega}, \quad (2.75)$$

де  $\dot{\omega} = \varepsilon$  (кутове прискорення).

Визначимо суму моментів зовнішніх сил системи відносно осі  $Z$  (див. 2.64)

$$\sum_{i=1}^N m_z(\bar{F}_i^e) = FR - Qrsin\alpha. \quad (2.76)$$

Зрівняємо обидві частини рівняння відповідно до загального рівняння (2.64) і розрахуємо його відносно  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{2(FR - Qrsin\alpha)}{(2Q - P_2)r^2 + P_3R^2} g. \quad (2.77)$$

Прискорення вантажу 1 дорівнює

$$a = \varepsilon r = \frac{2(FR - Qrsin\alpha)r}{(2Q + P_2)r^2 + P_3R^2} g.$$

Розглянемо приклад застосування теореми про зміну кінетичного моменту в обох формах (інтегральній і диференціальній) при наявності складного руху точки.

Однорідна горизонтальна платформа (прямокутна з сторонами  $2l$  і  $l$ ), яка має масу  $m_1$ , жорстко скріплена з вертикальним валом і обертається разом з ним навколо осі  $Z$  з кутовою швидкістю  $\omega_0$  (рис. 2.12). У момент часу  $t_0 = 0$  на вал починає діяти обертальний момент  $M$ , спрямований протилежно  $\omega_0$ . Одночасно вантаж  $D$  масою  $m_2$ , який знаходиться в жолобі  $AB$  в точці  $C$ , починає рухатися по жолобу під дією внутрішніх сил за законом  $S = CD = F(t)$ . Визначити, нехтуючи масою вала, залежність  $\omega = f(t)$  – закон зміни кутової швидкості платформи за наступними даними.

$$m_1 = 16 \text{ кг}, m_2 = 10 \text{ кг}, l = 0,5 \text{ м}, \omega_0 = 2 \text{ с}^{-1},$$

$$S = 0,4t^2 \text{ м}, M = kt,$$

$$\text{де } k = 6 \text{ Нм/с}.$$

### Рішення

Зробимо рисунок відповідно до умов задачі з позначенням всіх параметрів (геометричних, кінематичних і силових) відповідно змісту теореми про зміну кінематичного моменту системи.

Вид за стрілкою

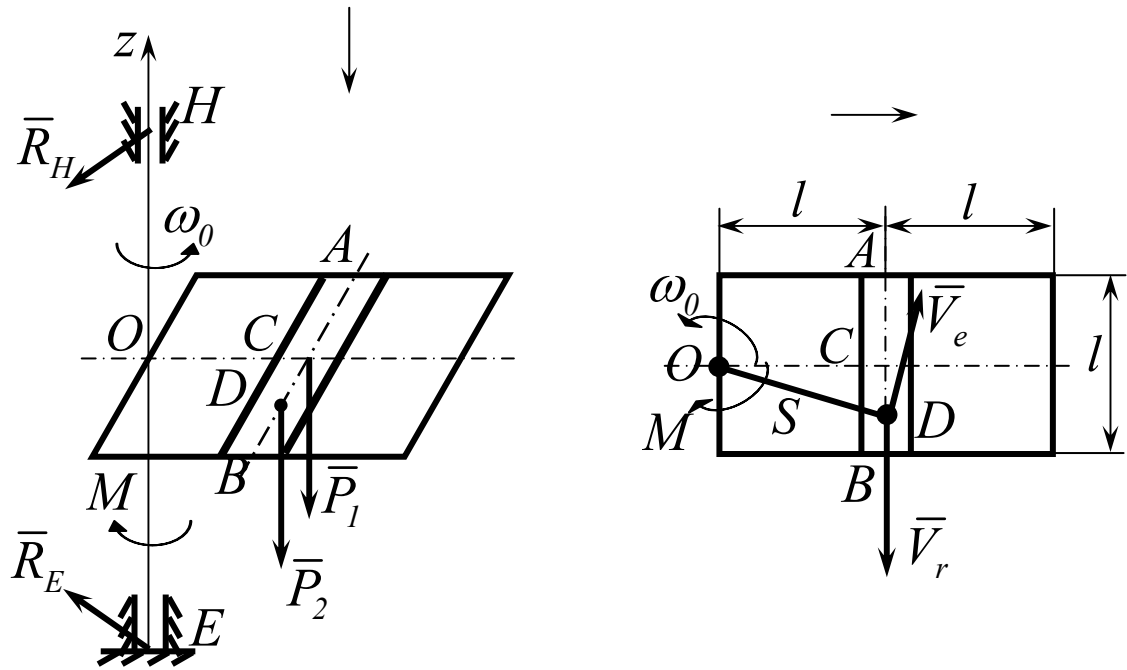


Рисунок 2.12

Запишемо теорему про зміну кінетичного моменту системи в диференціальній формі відносно осі обертання  $Z$  :

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{i=1}^N m_z(\bar{F}_i^e).$$

Відповідно (див. рис. 2.12) сили ваги  $\bar{P}_1$  і  $\bar{P}_2$  паралельні осі  $Z$ , а реакції  $\bar{R}_E$  і  $\bar{R}_H$  перетинають цю вісь. Таким чином їх моменти відносно осі  $Z$  дорівнюють нулю. Тоді, вважаючи для моменту позитивним напрямком  $\omega_0$  (тобто за ходом годинної стрілки), отримаємо

$$\sum_{i=1}^N m_z(\bar{F}_i^e) = -M = -kt,$$

і попереднє рівняння набуде такого вигляду

$$\frac{dK_z}{dt} = -kt. \quad (2.78)$$

Проінтегруємо рівняння (2.78)

$$K_z = -\frac{k}{2}t^2 + C. \quad (2.79)$$

Для даної механічної системи

$$K_z = K_z^{\Pi} + K_z^D, \quad (2.80)$$

де  $K_z^{\Pi}$  і  $K_z^D$  – кінетичні моменти платформи і вантажу  $D$  відповідно

$$K_z^{\Pi} = I_z \omega.$$

Значення моменту інерції платформи  $I_z$  знайдемо за теоремою Гюйгенса:

$$I_z = I_{cz} + m_1(OC)^2 = I_{cz} + m_1 l^2,$$

де  $I_{cz}$  – момент інерції відносно осі, паралельної осі  $Z$ , і яка проходить через центр  $C$  платформи.

Як відомо

$$I_{cz} = m_1(4l^2 + l^2)/12 = 5m_1 l^2 / 12;$$

тоді 
$$I_z = 5m_1 l^2 / 12 + m_1 l^2 = 17m_1 l^2 / 12;$$

Таким чином 
$$K_z^{\Pi} = (17m_1 l^2 / 12) \omega. \quad (2.81)$$

Для визначення  $K_z^D$  звернемося до рисунка 2.12 і роздивимося рух вантажу  $D$  як складний, вважаючи його рух по платформі відносним, а обертання самої платформи навколо осі  $Z$  переносним рухом. Тоді абсолютна швидкість вантажу

$$\bar{V} = \bar{V}_r + \bar{V}_e.$$

Так як вантаж  $D$  рухається за законом

$$s = CD = 0,4t^2,$$

то

$$V_r = \dot{s} = 0,8t.$$

Зображаємо вектор  $\bar{V}_r$  на рисунку 2.12 з розрахунком знака  $\dot{s}$  (при  $\dot{s} < 0$  напрямом  $\bar{V}_r$  був би протилежним). Потім, розраховуючи напрямом  $\omega$ , зображаємо вектор  $\bar{V}_e$  ( $\bar{V}_e \perp OD$ ); чисельно  $V_e = \omega OD$ . Тоді за теоремою Варіньона маємо:

$$\begin{aligned} K_z^D &= m_z(m_2 \bar{V}) = m_z(m_2 \bar{V}_r) + m_z(m_2 \bar{V}_e) = \\ &= -m_2 V_r OC + m_2 V_e OD = -0,8m_2 t + m_2 (OD)^2 \omega. \end{aligned} \quad (2.82)$$

З рисунка 2.12 видно, що

$$OD^2 = l^2 + S^2 = l^2 + 0,16t^4.$$

Підставляючи значення  $OD^2$  в рівняння (2.82), а потім значення  $K_z^{\Pi}$  і  $K_z^D$  з формул (2.81 і 2.82) в рівняння (2.80), отримаємо з рахунком даних задачі:

$$K_z = \frac{17}{12} m_1 l^2 \omega + m_2 (l^2 + 0,16t^4) \omega - 0,8m_2 l t = (8,17 + 1,6t^4) \omega - 4t. \quad (2.83)$$

Тоді рівняння (2.79), де  $k = 6$ , набуде вигляду:

$$(8,17 + 1,6t^4) \omega - 4t = -3t^2 + C_1. \quad (2.84)$$

Сталу інтегрування  $C_1$  знаходимо за початковими умовами: при  $t = 0$ ,  $\omega = \omega_0$ . Отримаємо  $C_1 = 8,17\omega_0 = 16,34$ . При цьому значенні  $C_1$  із рівняння (2.84) знаходимо шукану залежність  $\omega$  від  $t$ :

$$\omega = (16,34 + 4t - 3t^2) / (8,17 + 1,6t^4),$$

де  $t$  – в секундах, а  $\omega$  – в  $c^{-1}$ .

Показано розв'язування задачі за допомогою теореми про зміну кінетичного моменту системи в диференціальній формі, а раніше і в інтегральній на другому прикладі.

Розв'язування цієї задачі за допомогою інтегральної форми теореми рівнозначно інтегруванню рівняння (див. 2.78) в визначених межах інтегрування, тобто від  $K_{z0}$  до  $K_z$ , від 0 до  $t$ . Це вимагає визначення



$K_{z0}$  додатково, але не вимагає визначення сталої інтегрування  $C_1$ .

### 2.3.3 Використання окремих випадків теореми. Закони збереження кінетичного моменту

Закони збереження кінетичного моменту виникають як окремі випадки із теореми про зміну кінетичного моменту системи.

1. Якщо головний момент зовнішніх сил системи відносно центра  $O$  за весь час руху дорівнює нулю, то з рівності

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = 0;$$

випливає, що кінетичний момент системи є сталим вектором

$$\bar{K}_0 = \overline{const}. \quad (2.85)$$

2. Якщо головний момент зовнішніх сил відносно даної нерухомої осі за весь час руху системи дорівнює нулю, то кінетичний момент системи відносно тієї самої осі зберігається незмінним за величиною.

Нехай, наприклад,  $M_z^e = 0$ . За цієї умови будемо мати

$$\frac{dK_z}{dt} = 0,$$

З цієї рівності випливає

$$K_z = const. \quad (2.86)$$

Перелічені окремі випадки відображають закони природи. Вони пояснюють:

- 1 Реактивний момент вертольота.
- 2 Розгойдування гойдалки.
- 3 Намагання обертання ствола при обертанні в ньому снаряда.
- 4 Рух спортсменів.

Наявність окремих випадків значно спрощує рішення задач. Розглянемо такий приклад.

Однорідна кругла горизонтальна платформа радіусом  $R$  і вагою  $\bar{Q}$  може обертатись без тертя навколо вертикальної осі. Як зміниться кутова швидкість платформи, якщо людина, яка спочатку стояла на платформі на відстані  $r$  від її осі, піде: 1 – по колу радіусом  $r$  по платформі з відносною швидкістю  $U$ ; 2 – перпендикулярно осі обертут платформи, відходячи від неї з тією самою відносною швидкістю.

### Рішення

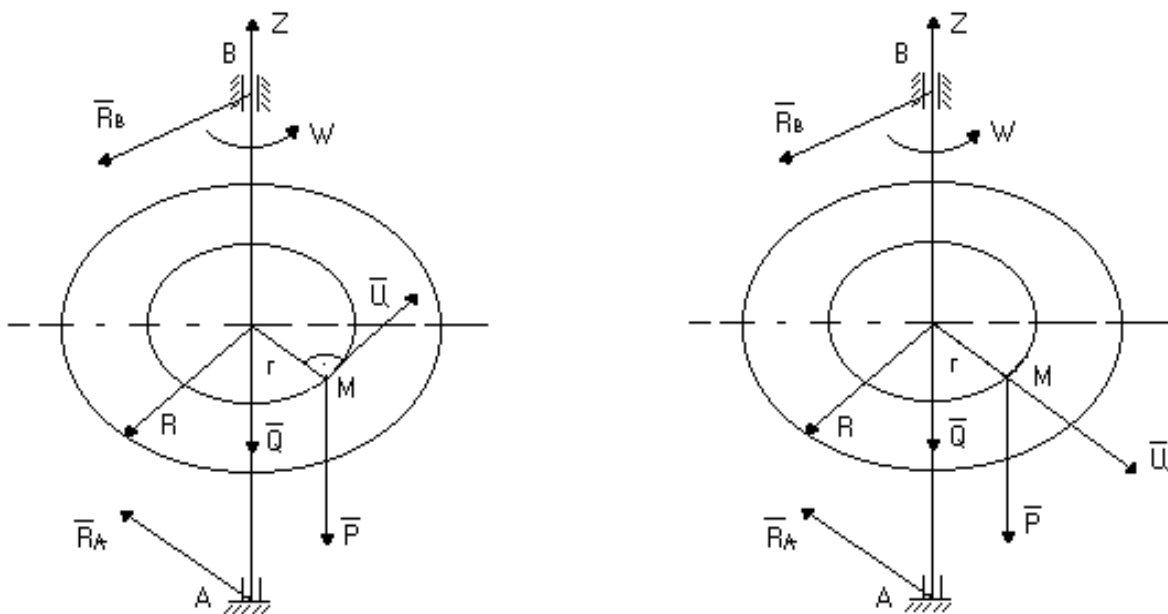


Рисунок 2.13

Нехай кутова швидкість платформи була  $\omega_0$ , а потім внаслідок руху людини по платформі стала  $\omega$ . Оскільки зовнішні сили для системи, яка

складається із платформи і людини, паралельні осі  $Z$  (рис. 2.13) або її перетинають, то

$$\sum_{i=1}^N m_z(\bar{F}_i^e) = 0;$$

і отже

$$\begin{aligned} K_z &= \text{const}; \\ K_z &= K_{oz}. \end{aligned} \tag{2.87}$$

Визначимо кінетичний момент системи для двох випадків напрямку відносної швидкості  $\bar{U}$  в початкові та кінцеві моменти часу :

1. Початковий момент часу

$$K_{oz} = \left( \frac{Q}{2g} \cdot R^2 + \frac{P}{g} \cdot r^2 \right) \cdot \omega_o. \tag{2.88}$$

В обох випадках значення  $K_{oz}$  однакові.

2. Кінцевий момент часу.

Перший випадок:

$$K_z = \left( \frac{Q}{2g} \cdot R^2 + \frac{P}{g} \cdot r^2 \right) \cdot \omega + \frac{P}{g} rU. \tag{2.89}$$

Другий випадок:

$$K_z = \left( \frac{Q}{2g} \cdot R^2 + \frac{P}{g} \cdot (r + Ut)^2 \right) \cdot \omega. \tag{2.90}$$

Якщо порівняти послідовно вирази (2.89 і 2.90) до виразу (2.87) відповідно до закону (2.86) і розв'язати отримані рівняння відносно шуканої кутової швидкості платформи, то будемо мати висновок, що у другому випадку кутова швидкість змінюється за законом:

$$\omega = \omega_0 \frac{QR^2 + 2Pr^2}{QR^2 + 2P(r + Ut)^2},$$

а в першому зменшується відповідно рівнянню:

$$\omega = \omega_0 - \frac{P \cdot r}{0,5QR^2 + Pr^2} U.$$

#### 2.3.4 Диференціальне рівняння обертання тіла навколо нерухомої осі

З теореми про зміну кінетичного моменту випливає диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{i=1}^N m_z (\bar{F}_i^e). \quad (2.91)$$

Звісно, що кінетичний момент тіла відносно осі обертання:

$$K_z = I_z \omega, \quad (2.92)$$

де  $I_z$  – сталий момент інерції твердого тіла відносно нерухомої осі;  
 $\omega$  – кутова швидкість.

Ураховуючи рівняння (2.91 і 2.92), отримуємо:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum_{i=1}^N m_z (\bar{F}_i^e). \quad (2.93)$$

Якщо ввести кут обороту тіла  $\varphi$ , то, ураховуючи, що

$$\frac{d\omega}{dt} = \dot{\varphi},$$

маємо

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^N m_z (\bar{F}_i^e). \quad (2.94)$$

Рівняння (2.94) є диференціальним рівнянням обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Воно повністю аналогічно диференціальному рівнянню поступального руху твердого тіла в проекції на деяку ось і дає змогу вирішувати як першу, так і другу задачі динаміки.

Застосуємо диференціальне рівняння (див. 2.94) на такому прикладі.

Тверде тіло починає здійснювати обертальний рух відносно нерухомої осі  $Z$  під дією сталого моменту  $M$ . При цьому виникає момент сил опору  $M_I$ , пропорційний квадрату кутової швидкості обороту тіла, тобто  $M_I = \alpha \omega^2$ . Знайти закон зміни кутової швидкості, якщо момент інерції тіла відносно осі обертання  $J = I \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

### **Рішення**

Складемо диференціальне рівняння обертання тіла навколо нерухомої осі для даного випадку

$$I \ddot{\varphi} = M - \alpha \dot{\varphi}^2, \quad (2.95)$$

де  $\dot{\varphi} = \omega$  – кутова швидкість тіла.

Зробимо заміну:

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}.$$

Тоді

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{\alpha}{I} \left( \frac{M}{\alpha} - \dot{\varphi}^2 \right),$$

або

$$\frac{d\dot{\varphi}}{\frac{M}{\alpha} - \dot{\varphi}^2} = \frac{\alpha}{I} dt. \quad (2.96)$$

Про інтегруємо рівняння (2.96), застосувавши табличний інтеграл.

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \frac{|a+x|}{|a-x|} + C.$$

Тоді

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{M}} \cdot \ln \frac{\sqrt{\frac{M}{\alpha}} + \dot{\varphi}}{\sqrt{\frac{M}{\alpha}} - \dot{\varphi}} = \frac{\alpha}{J} t + C_1. \quad (2.97)$$

При  $t = 0$  маємо  $\dot{\varphi} = \omega_0 = 0$ , тому

$$C_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{M}} \cdot \ln 1 = 0, \text{ тобто}$$

$$\ln \frac{\sqrt{\frac{M}{\alpha}} + \dot{\varphi}}{\sqrt{\frac{M}{\alpha}} - \dot{\varphi}} = \frac{2\sqrt{M\alpha}}{J} t. \quad (2.98)$$

Пропотенціюємо рівняння (2.98), зробивши заміну

$$\frac{2\sqrt{M\alpha}}{J} = \beta. \quad (2.99)$$

В результаті чого одержимо:

$$\frac{\sqrt{\frac{M}{\alpha}} + \dot{\varphi}}{\sqrt{\frac{M}{\alpha}} - \dot{\varphi}} = e^{\beta t}. \quad (2.100)$$

Розв'язавши це рівняння відносно  $\dot{\varphi}$ , визначимо шукану кутову швидкість обертання тіла.

$$\omega = \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \cdot \frac{1 - e^{-\beta t}}{1 + e^{-\beta t}}. \quad (2.101)$$

Аналіз одержаного результату дозволяє зробити висновок, що при обертанні тіла під дією такого навантаження на протязі досить великого проміжку часу (коли  $t \rightarrow \infty$ ) його кутова швидкість прямує до свого граничного значення.

$$\omega_{гран} = \sqrt{\frac{M}{\alpha}}.$$

Розглянемо також випадок, коли момент опору обертального руху тіла навколо нерухомої осі пропорційний кутовій швидкості, тобто коли  $M_I = \alpha\omega$ .

Запишемо диференціальне рівняння руху

$$I\ddot{\phi} = M - \alpha\dot{\phi},$$

або

$$\ddot{\phi} = \frac{\alpha}{I} \left( \frac{M}{\alpha} - \dot{\phi} \right). \quad (2.102)$$

Зробимо заміну в рівнянні (2.102)  $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$  і розділимо змінні.

Тоді отримаємо:

$$\frac{d\dot{\phi}}{\frac{M}{\alpha} - \dot{\phi}} = \frac{\alpha}{I} dt,$$

або

$$\frac{d\left(\frac{M}{\alpha} - \dot{\phi}\right)}{\frac{M}{\alpha} - \dot{\phi}} = -\beta dt, \quad (2.103)$$



де  $\beta = \frac{\alpha}{I}$ .

Проінтегруємо рівняння (2.103) і отримаємо

$$\ln\left(\frac{M}{\alpha} - \dot{\varphi}\right) = -\beta t + C_1. \quad (2.104)$$

Відповідно початковим умовам:  $t = 0$ ,  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \omega_0 = 0$ , маємо

$C_1 = \ln\left(\frac{M}{\alpha}\right)$  і рівняння (2.104) тоді набуде вигляду:

$$\ln\left(1 - \frac{\alpha\dot{\varphi}}{M}\right) = -\beta t. \quad (2.105)$$

Пропотенціюємо рівняння (2.105) і розрахуємо його відносно  $\omega$ , ураховуючи, що  $\dot{\varphi} = \omega$ :

$$\omega = \frac{M}{\alpha} \cdot (1 - e^{-\beta t}). \quad (1.106)$$

Як бачимо, в цьому випадку при достатньо тривалому навантаженні обертання твердого тіла наближається до рівномірного з постійною куто-

вою швидкістю  $\omega = \frac{M}{\alpha}$ .

#### 2.4 Теорема про зміну кінетичної енергії при дослідженні руху матеріальних об'єктів

Теорема про зміну кінетичної енергії має наступний загальний вираз

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^N A_i^e + \sum_{i=1}^N A_i^i, \quad (2.107)$$

де  $T$  – кінетична енергія механічної системи в кінцевий момент часу;  
 $T_0$  – кінетична енергія механічної системи в початковий момент часу;

$\sum_{i=1}^N A_i^e$  – сума робіт всіх зовнішніх сил, діючих на систему;

$\sum_{i=1}^N A_i^i$  – сума робіт всіх внутрішніх сил, діючих на точки системи.

ми.

Якщо система в початковий момент часу була нерухомою, то початкова кінетична енергія системи дорівнює нулю, тобто

$$T_0 = 0. \quad (2.108)$$

У частковому випадку незмінної механічної системи, коли тіла механічної системи абсолютно тверді і з'єднанні нерозтяжними нитками, сума робіт всіх внутрішніх сил також дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{i=1}^N A_i^i = 0. \quad (2.109)$$

У тому випадку, коли в системі присутні пружні елементи, заведено при розв'язанні задач роботу пружних сил відносять до роботи зовнішніх сил.

Таким чином, теорема про зміну кінетичної енергії при розв'язанні задач має такий вигляд:

$$T = \sum_{i=1}^N A_i^e. \quad (2.110)$$

### 2.4.1 Визначення кінетичної енергії точки і механічних систем

Кінетична енергія точки визначається залежністю:

$$T = \frac{1}{2} m V^2. \quad (2.111)$$

Кінетична енергія системи складається із кінетичних енергій окремих її точок, за цим означенням маємо

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i V_i^2. \quad (2.112)$$

Якщо система складається із декількох тіл, то її кінетична енергія дорівнює сумі кінетичних енергій цих тіл

$$T = \sum_{i=1}^N T_i. \quad (2.113)$$

Кінетична енергія тіла залежить від руху, який має тіло. У випадку поступального руху тіла його кінетична енергія обчислюється за формулою:

$$T = \frac{1}{2} M V^2, \quad (2.114)$$

де  $M$  – маса тіла;

$V$  – швидкість тіла.

У випадку обертального руху тіла його кінетична енергія визначається за формулою:

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2, \quad (2.115)$$

де  $I_z$  – момент інерції тіла відносно осі обертання;

$\omega$  – кутова швидкість тіла.

Плоско-паралельний рух тіла складається з двох одночасних рухів: поступального і обертального. Тому формула для визначення кінетичної енергії в цьому випадку має вигляд:

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} I_{cz} \omega^2, \quad (2.116)$$

де  $M$  – маса тіла;

$V_c$  – швидкість центра мас;

$I_{cz}$  – момент інерції тіла відносно осі обертання  $Z$ , яка проходить через центр мас;

$\omega$  – кутова швидкість тіла.

Формула (2.116) відповідає теоремі Кенінга, відносно якої з точки зору складного руху тіла

$$T = T_e + T_r, \quad (2.117)$$

де  $T_e$  – кінетична енергія тіла в переносному русі;

$T_r$  – кінетична енергія тіла в відносному русі.

Таким чином, формула (2.116 і 2.117) адекватно відповідають одна одній.

Для прикладу обчислимо кінетичну енергію ходової частини трактора, який рухається зі швидкістю  $V$ . Відстань між осями коліс радіуса  $R$  дорівнює  $l$ , вага одного погонного метра гусениці –  $\gamma$  (рис. 2.14), вага одного колеса дорівнює  $P$ . Колеса вважати суцільними однорідними дисками.

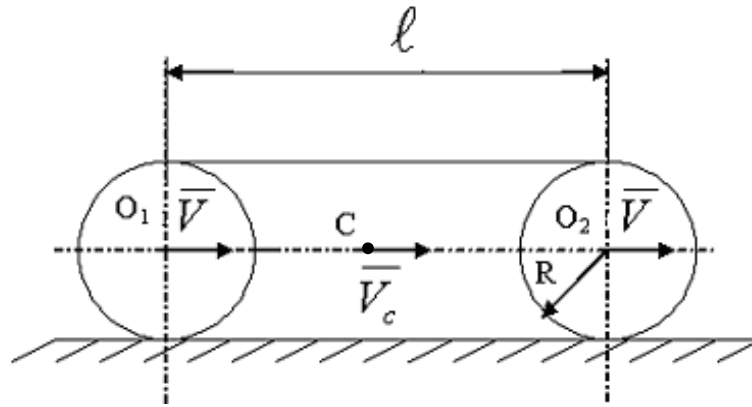


Рисунок 2.14

### Рішення

Визначимо масу гусениці

$$m = \frac{\gamma L}{g}, \quad (2.118)$$

де  $L$  – довжина гусениці,

$$L = 2(l + \pi R) \quad (2.119)$$

Гусениця виконує складний рух, тому її кінетичну енергію обчислимо за теоремою Кенінга

$$T_r = \frac{1}{2} m V_c^2 + T_r,$$

$$\text{де } V_c = V; \quad T_r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i V_{ir}^2.$$

У відносному русі всі точки мають швидкість  $V_{ir} = V$ . Тому кінетична енергія гусениці

$$T_G = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N m_i V^2 = \frac{1}{2}mV^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}V^2 \sum_{i=1}^N m_i = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}mV^2 = mV^2. \quad (2.144)$$

З урахуванням виразів (2.118, 2.119, 2.120) маємо

$$T_G = \frac{2\gamma(l + \pi R)}{g} V^2. \quad (2.121)$$

Визначимо кінетичну енергію коліс, які котяться без ковзання. Оскільки колеса виконують плоско-паралельний рух, то їх кінетичну енергію можна обчислити за формулою

$$T_K = 2 \left( \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} I_{cz} \omega^2 \right), \quad (2.122)$$

де  $V_c$  – швидкість центрів мас коліс (на рис. 2.14 точки  $O_1$  і  $O_2$ );

$I_{cz}$  – момент інерції коліс відносно осей, які проходять через їх центри мас.

Момент інерції диска відносно осі  $Z$ , яка проходять через центри ваги перпендикулярно до площини матеріальної симетрії колеса,

$$I_{cz} = \frac{1}{2} M R^2,$$

де  $M$  – маса колеса;

$R$  – радіус колеса.

$\omega$  у формулі (2.122) визначається з формули  $V_c = R\omega$ .

Таким чином

$$T_K = 2 \left( \frac{1}{2} \frac{P}{g} V^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{PR^2}{2g} \frac{V^2}{R^2} \right) = \frac{3}{2} \frac{PV^2}{g}. \quad (2.123)$$

Загальний вираз кінетичної енергії ходової частини трактора складається,

$$T = T_\Gamma + T_K = \frac{V^2}{2g} (4\gamma(l + \pi R) + 3P). \quad (2.124)$$

#### 2.4.2 Визначення роботи сили і потужності

Використання теореми про зміну кінетичної енергії при розв'язанні задач потребує визначення роботи сил в різноманітних випадках. Розглянемо ці випадки.

##### 1 Робота сил ваги.

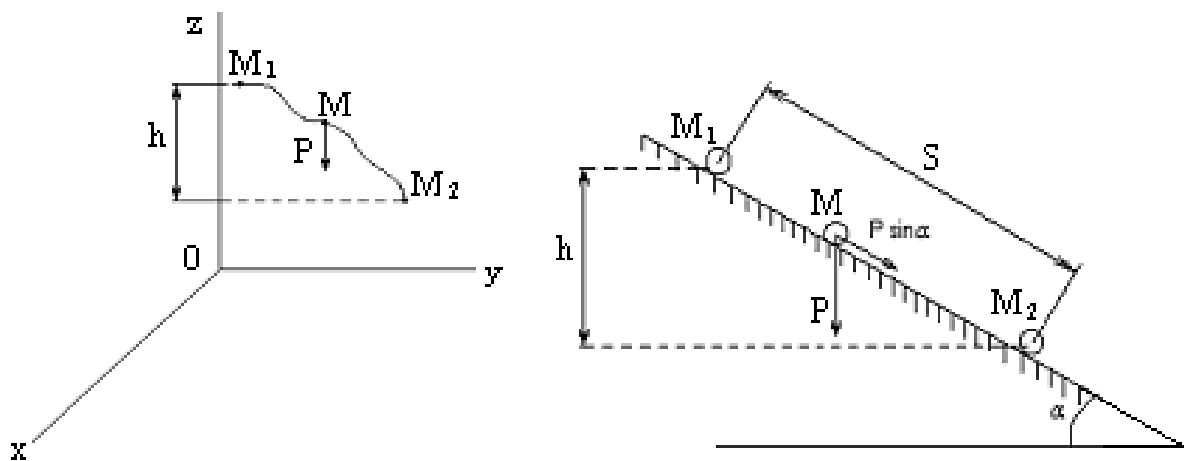


Рисунок 2.15

На рисунку 2.15 зображені дві схеми для визначення роботи сили ваги.

На схемі зліва точка  $M$  під дією сили ваги рухається із положення  $M_1$  на довільно розташованій в просторі траєкторії до положення  $M_2$ , а на іншій схемі – по похилій площині.

Робота сили ваги відповідно будь-якій із схем буде визначатися формулами:

$$A_{M_1 M_2} = \pm Ph. \quad (2.125)$$

де  $P$  – сила ваги;

$h$  – вертикальне переміщення точки.

На другій схемі, розміщеній праворуч (див. рис. 2.15), роботу сили ваги можливо отримати відповідно до формули

$$A = \pm PS \sin \alpha, \quad (2.126)$$

де  $P \sin \alpha$  – проекція сили ваги на напрямок руху точки;

$S$  – переміщення точки по площині.

В формулах (2.125) та (2.126) залежать від напрямку руху точки.

## 2 Робота сили пружності.

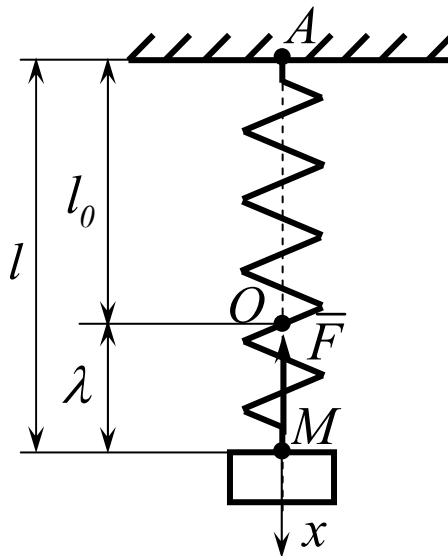


Рисунок 2.16



На рисунку 2.16 зображений вантаж  $M$ , підвішений до вільного кінця пружини. Точкою  $O$  відмітимо положення, яке займає кінець ненавантаженої пружини ( $AO = l_0$  – довжина ненапруженої пружини) і примемо цю точку за початок координат. При деформації пружини на величину  $\lambda = x$  на вантаж діятиме сила пружності  $\vec{F}$ , направлена до точки  $O$ , величина якої  $F = c\lambda = cx$ .

Робота сил пружності визначається формулою:

$$A = -\frac{c}{2}\lambda^2 = -\frac{c}{2}x^2. \quad (2.127)$$

На переміщенні вантажу від нульового положення, коли деформація пружини  $\lambda_0 = x_0$  до кінцевого положення з деформацією пружини  $\lambda_1 = x_1$  робота сили пружності буде:

$$A = -\frac{c}{2}(x_1^2 - x_0^2) = -\frac{c}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_0^2). \quad (1.128)$$

Робота сили пружності від'ємна при  $\lambda_0 < \lambda_1$ , тобто коли кінець пружини віддаляється від положення рівноваги, і додатня при наближенні кінця пружини до положення рівноваги (коли  $\lambda_0 > \lambda_1$ ).

### 3 Робота сили тертя ковзання

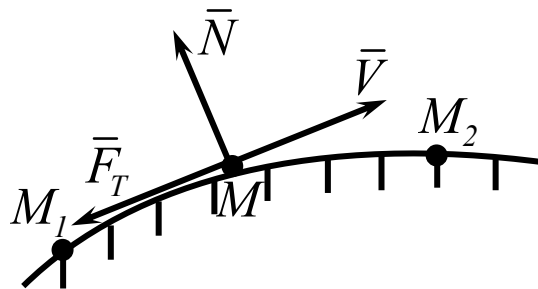


Рисунок 2.17

Розглянемо точку яка рухається по будь-якій шорсткій поверхні (рис.

2.17). Сила тертя  $\vec{F}_T$ , яка діє на точку, дорівнює  $fN$ ,

де  $f$  – коефіцієнт тертя;

$N$  – нормальна реакція поверхні.

Сила тертя напрямлена в бік, протилежний швидкості  $\vec{V}$  точки.

Якщо сила тертя стала величиною, то

$$A_{M_1 M_2} = -F_T S, \quad (2.129)$$

де  $S$  – довжина дуги кривої  $M_1 M_2$ , по якій рухається точка.

1. Робота сил, прикладених до тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

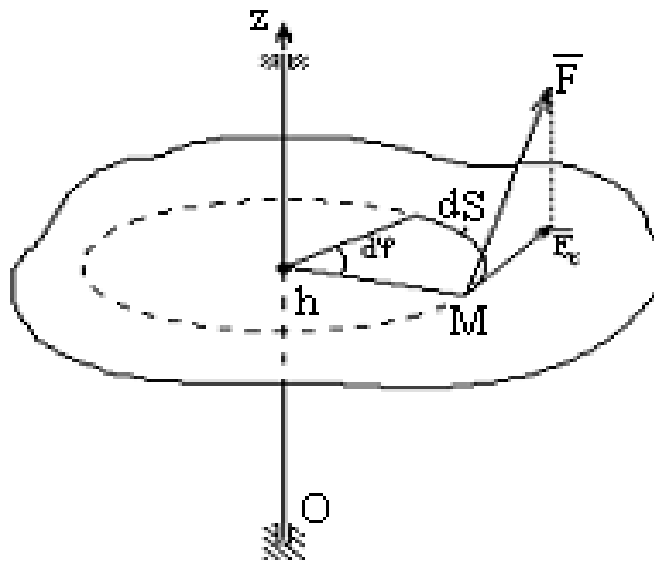


Рисунок 2.18

Визначимо роботу сили  $\vec{F}$ , в точці  $M$  прикладеної до тіла, яке обертається навколо нерухомої осі  $Z$  (рис. 2.18).

При повороті тіла на скінчений кут  $\varphi$ , робота дорівнює

$$A = \int_0^{\varphi} M_Z d\varphi. \quad (2.130)$$

У випадку сталого моменту ( $M_Z = const$ )

$$A = M_Z \varphi. \quad (2.131)$$

У формулах (2.130 і 2.131)

$$M_Z = F_{\tau} h.$$

2. Робота сили тертя кочення.

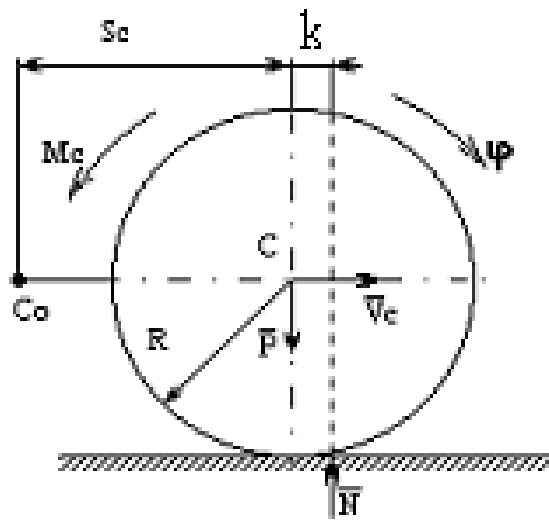


Рисунок 2.19

Опір коченню, що виникає внаслідок деформації поверхонь (рис 2.19), утворює пара сил  $(\bar{N}, \bar{P})$ , момент якої

$$M_c = kN,$$

де  $k$  – коефіцієнт тертя кочення.

Якщо  $N = const$ , то повна робота сили опору коченню буде

$$A_K = -kN\varphi = -M_C\varphi, \quad (2.132)$$

або

$$A_K = -\frac{k}{R}Ns_C. \quad (2.133)$$

Оскільки величина  $\frac{k}{R}$  мала при наявності інших опорів, опором коченню можна в першому наближенні знехтувати.

### 2.4.3 Застосування теореми про зміну кінетичної енергії при дослідженні руху матеріальних об'єктів

Застосування даної теореми при дослідженні руху матеріальних об'єктів з'ясуємо на таких прикладах.

Приклад 1. Визначити, яку найменшу початкову швидкість, направлену вертикально вгору, треба надати тілу, щоб воно піднялося з поверхні Землі на висоту  $H$  (рис.2.20). Силу притягання вважати обернено пропорційною квадрату відстані тіла від центра Землі (т.  $O$ ):

$$F = \frac{mgR^2}{x^2},$$

де  $R$  – радіус Землі;

$x$  – відстань тіла до центра Землі.

### Рішення

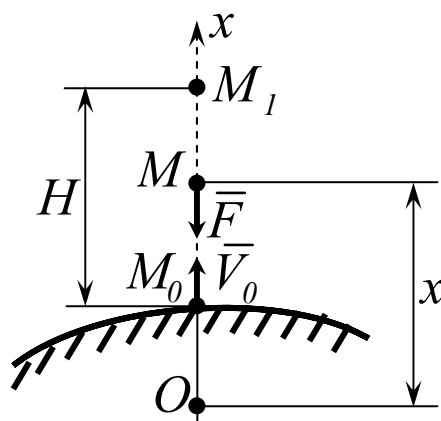


Рисунок 2.20

Розглянемо тіло  $M$  як матеріальну точку, на яку діє сила притягання до центра Землі.

Проекція сили  $\bar{F}$  на вісь  $Ox$

$$F_x = \frac{-mgR^2}{x^2},$$

Звернемося до теореми про зміну кінетичної енергії:

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^N A_i^e. \quad (2.134)$$

Так, як в кінцевому положенні  $M_1$  швидкість точки  $V_1 = 0$ , то її кінцева кінетична енергія дорівнює нулю, тобто:

$$T = 0.$$

Початкова кінетична енергія точки складає  $\frac{mV_0^2}{2}$ .

Таким чином ліва частина рівняння (2.134) має значення  $-\frac{mV_0^2}{2}$ .

Обчислимо праву частину рівняння (див.2.134):

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N A_i^e &= A_{M_0M_1} = \int_R^{R+H} F_x dx = \int_R^{R+H} \left( -\frac{mgR^2}{x^2} \right) dx = \\
 &= -mgR^2 \int_R^{R+H} \frac{dx}{x^2} = mgR^2 \cdot \frac{1}{x} \Big|_R^{R+H} = \\
 &= mgR^2 \left( \frac{1}{R+H} - \frac{1}{R} \right) = -\frac{mgRH}{R+H}.
 \end{aligned} \tag{2.135}$$

Дорівняємо кінетичну енергію і роботу зовнішніх сил:

$$-\frac{mV_0}{2} = -\frac{mgRH}{R+H}.$$

Звідки остаточно отримаємо

$$V_0 = \sqrt{\frac{2gRH}{R+H}}. \tag{2.136}$$

Знайдемо, при якій початковій швидкості  $V_0$  тіло, кинуте вертикально вгору, піде в нескінченність. Поділивши чисельник і знаменник виразу (2.136) на  $H$ , одержимо

$$V_0 = \sqrt{\frac{2gR}{1 + \frac{R}{H}}}. \quad (2.137)$$

При  $H \rightarrow \infty$   $\frac{R}{H} \rightarrow 0$  із (2.137) знаходимо:

$$V_0 = \sqrt{2gR} \approx 11,2 \text{ км/с}. \quad (2.138)$$

Формула (2.138) визначає другу космічну швидкість. Друга космічна швидкість – це найменша початкова швидкість  $V_0$ , за якої можливе відділення тіла від поверхні Землі за незамкненою траєкторією.

Першою космічною швидкістю називається найменша початкова швидкість, за якої тіло може залишити поверхню Землі, перетворившись у її штучний супутник. Вона визначається за формулою

$$V_0 = \sqrt{gR} \approx 7,9 \text{ км/с}.$$

При швидкостях, які лежать в межах  $8 \text{ км/с} \leq V_0 \leq 11 \text{ км/с}$ , тіло, кинуте за напрямом дотичної до земної поверхні, перетворюється в земного супутника. При швидкостях, менших за  $8 \text{ км/с}$ , тіло описавши еліптичну траєкторію, упаде на Землю. Усі ці результати відносяться до руху в безповітряному просторі.

Цей приклад свідчить, що використання загальних теорем динаміки (в даному випадку теореми про зміну кінетичної енергії) дає змогу в ряді випадків уникнути інтегрування рівняння руху точки.

Приклад 2. У маятнику Максвелла однорідний циліндр вагою  $\bar{P}$  і радіусом  $R$  падає вниз без початкової швидкості, розмотуючи нитку, яка намотана на циліндр в його серединнім перерізі. Визначити швидкість осі

циліндра залежно від висоти її опускання (рис. 2.21).

**Рішення**

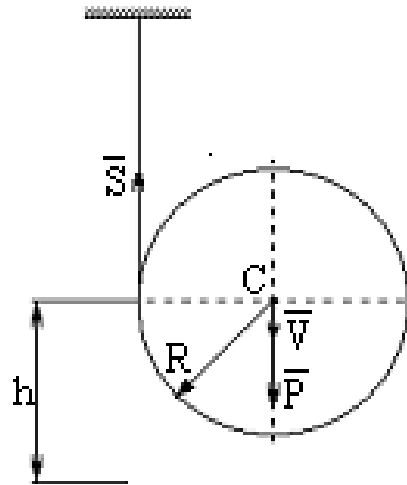


Рисунок 2.21

За теоремою про зміну кінетичної енергії твердого тіла маємо:

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^N A_i^e. \quad (2.139)$$

Оскільки в початковий момент часу циліндр знаходився в стані покою, то

$$T_0 = 0 \quad (2.140)$$

Циліндр виконує плоско-паралельний рух. Його кінетична енергія в момент опускання висоту  $h$ :

$$T = \frac{P}{g} \frac{V_C^2}{2} + I_C \frac{\omega^2}{2}, \text{ де } I_C = \frac{PR^2}{2g}, V_C = \omega R,$$



тому

$$T = \frac{3}{4} \frac{P}{g} V_C^2. \quad (2.141)$$

Зовнішніми силами є сила ваги  $\bar{P}$  і реакція нитки  $\bar{S}$ . Сила  $\bar{S}$  весь час прикладена в миттєвому центрі швидкостей циліндра, тому робота цієї сили дорівнює нулю.

Отже,

$$\sum_{i=1}^N A_i^e = Ph. \quad (2.142)$$

Підставляючи знайдені величини (2.140, 2.141 і 2.142) відповідно у вираз теореми про зміну кінетичної енергії (2.139), одержимо:

$$\frac{3}{4} \frac{P V_C^2}{g} = Ph,$$

звідки

$$V_C = \frac{2}{3} \sqrt{3gh}. \quad (2.143)$$

Диференціюючи рівняння (2.143) за часом і враховуючи, що  $\frac{dh}{dt} = V_C$ , знайдемо прискорення точки  $C$   $a_C = \frac{2}{3} g$ .

Приклад 3. На циліндричний каток 1 радіуса  $R$ , та вагою  $\bar{P}$  намотана нитка, перекинута через блок 3 (рис. 2.22).

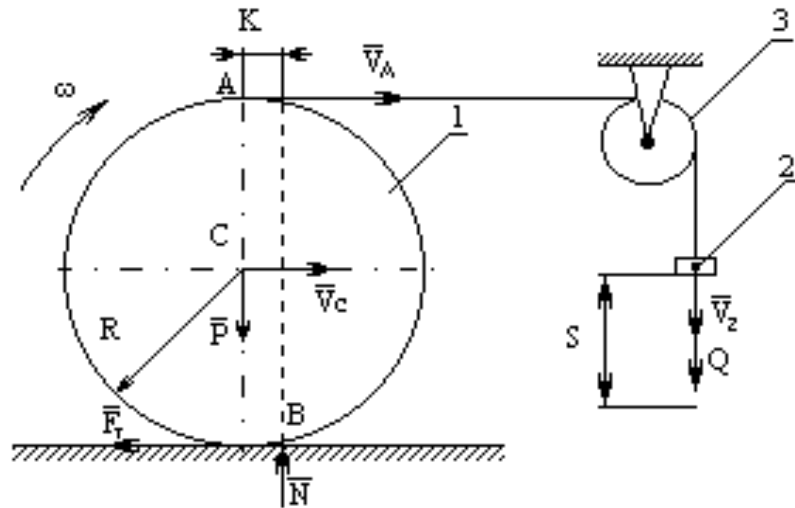


Рисунок 2.22

Нитка несе на кінці вантаж 2 вагою  $\bar{Q}$ . Визначити, яку швидкість  $\bar{V}_C$  буде мати центр  $C$  катка, коли вантаж 2 пройде шлях  $S$ , якщо  $V_{C_0} = 0$ , і знайти прискорення  $\bar{a}_C$  цього центра. Коефіцієнт тертя кочення катка дорівнює  $k$ , радіус інерції катка відносно його осі –  $\rho$ . Масою нитки і блока 3 знехтувати.

**Рішення**

Для визначення швидкості  $\bar{V}_C$  скористаємося рівнянням

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^N A_i^e. \tag{2.144}$$

У даному випадку

$$T_0 = 0,$$

а

$$T = T_1 + T_2,$$

(2.145)

де

$$T_1 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} V_C^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{P}{g} \rho^2 \right) \omega^2.$$

(2.146)

Оскільки точка  $B$  є миттєвим центром швидкостей, то  $\omega = \frac{V_C}{R}$  і

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} V_2^2,$$

(2.147)

де  $V_2 = V_A = 2V_C$ .

Отже

$$T = \frac{1}{2} \left( 4Q + P \left( 1 + \frac{\rho^2}{R^2} \right) \right) V_C^2.$$

(2.148)

Роботу виконують сила  $\bar{Q}$  і пара  $(\bar{N}, \bar{P})$ . Оскільки  $V_I = 2V_C$ , то переміщення точки  $C$   $S_C = 0,5S$ . Робота складається з двох частин,

$$\sum_{i=1}^N A_i^e = A_Q + A_K,$$

(2.149)

де  $A_Q$  – робота сили  $Q$ .

$$A_Q = Qs.$$

(2.150)

$$A_K = \frac{1}{2} \frac{S}{R} m(\bar{N}, \bar{P}), \quad (2.151)$$

де  $A_K$  – робота сил тертя кочення котка.

Тоді відповідно рівнянню (2.149)

$$\sum_i A_i^e = QS - \frac{1}{2} \frac{k}{R} Ps. \quad (2.152)$$

Підставимо знайдені величини в рівняння (2.144), одержимо:

$$\frac{1}{2g} (4Q + P(1 + \frac{\rho^2}{R^2})) V_C^2 = (Q - \frac{1}{2} \frac{k}{R} P) s,$$

Звідки

$$V_C = \sqrt{\frac{2g(QR - \frac{1}{2}kP)Rs}{4QR^2 + P(R^2 + \rho^2)}}. \quad (2.153)$$

Для визначення прискорення  $\bar{a}_c$  диференціюємо обидві частини рівняння (2.153) за часом. Остаточно, враховуючи, що  $\frac{ds}{dt} = V_C$ , знайдемо

$$a_c = \frac{(2QR - \frac{1}{2}kP)R}{4QR^2 + P(R^2 + \rho^2)} g.$$

Отже рух центра катка буде рівномірно-прискореним.

Приклад 4. Автомобіль масою  $M$ , який рухається прямолінійно по

горизонтальній дорозі, має швидкість  $\bar{V}$ . Коефіцієнт тертя кочення коліс автомобілю дорівнює  $k$ , радіус колеса  $R$ , сила аеродинамічного опору  $\bar{R}_0$  повітря пропорційна квадрату швидкості:  $R_0 = \mu MgV^2$ , де  $\mu$  – коефіцієнт, залежний від форми автомобіля. Визначити потужність  $W$  двигуна, що передається на вісі ведучих коліс, в установленому режимі.

### **Рішення**

У цьому прикладі робота сил складається з двох частин:

$$\sum_{i=1}^N A_i^e = A_{R_0} + A_K, \quad (2.154)$$

де  $A_{R_0}$  – робота сили опору повітря  $R_0$ .

$$A_{R_0} = R_0 S = \mu MgV^2 s. \quad (2.155)$$

$$A_K = m(\bar{N}, \bar{P}) \frac{S}{R} = \frac{k}{R} P S, \quad (2.156)$$

де  $A_K$  – робота сил тертя кочення коліс автомобіля,  $m(\bar{N}, \bar{P})$  – момент пари сил  $(\bar{N}, \bar{P})$ , який дорівнює  $kP$ , бо  $N = P$  (див. рис. 2.22). Урахування, що  $P = Mg$ , запишемо повну роботу сил відповідно до виразу (2.154):

$$\sum_{i=1}^N A_i^e = Mg \left( \mu V^2 + \frac{k}{R} \right) s. \quad (2.157)$$

Визначення потужності  $W$ , як відомо, відповідає формулі

$$W = \frac{dA}{dt}. \quad (2.158)$$

Ураховуючи, що  $\frac{ds}{dt} = V$ , знайдемо

$$W = Mg\left(\mu V^2 + \frac{k}{R}\right)V.$$

## 2.5 Значення загальних теорем і раціональний вибір вигляду загальної теореми при розв'язанні задач

До загальних теорем динаміки відносяться: теорема про зміну кількості руху, теорема про зміну моменту кількості руху, а також теорема про зміну кінетичної енергії.

Раніше були розглянути приклади розв'язання задач за допомогою загальних теорем динаміки.

Усі теореми одержані з основного рівняння динаміки, що свідчить про зв'язок між ними. Іншими словами, загальні теореми динаміки висловлюють різні розв'язання задач. Завдяки цьому теореми мають велике значення в класичній механіці. Крім того, вони значно спрощують вирішення задач механічних систем.

Наприклад, для знаходження руху механічної системи за заданими силами і початковими умовами для кожної точки системи потрібно проінтегрувати  $3N$  диференціальних рівнянь, де  $N$  – загальна кількість точок системи.

Ця задача є досить складною у випадку двох матеріальних точок, які

рухаються під дією сил взаємодії за законом всесвітнього тяжіння (задача двох тіл) і зовсім не у випадку трьох взаємодіючих точок (задача трьох тіл).

Задача інтегрування диференціальних рівнянь механічної системи значно ускладнюється, якщо на механічну систему накладені в'язі, сили реакцій яких заздалегідь невідомі.

У деяких випадках теореми динаміки дають змогу отримати перші інтеграли, тобто рівняння, в яких відсутні похідні другого порядку від координат за часом.

Значення основних теорем полягає і в тому, що вони встановлюють наочні залежності між основними динамічними характеристиками руху матеріальних систем, які широко використовуються в інженерній практиці. Крім того, основні теореми дають можливість вивчати окремі, практично важливі сторони даного явища, не вивчаючи це явище в цілому.

Застосування основних теорем на практиці нерідко приводить до повного розв'язання поставленої задачі. При цьому відпадає потреба інтегрування рівнянь руху, що є значно складнішою задачею.

Однак, слід пам'ятати, що задовольнитися використанням основних (загальних) теорем можна лише при вивченні найбільш простих рухів систем, або при розгляді якої-небудь однієї сторони складних рухів. Вичерпні відомості про рух може дати тільки повне інтегрування диференціальних рівнянь її руху.

При виборі конкретної теореми для розв'язання тієї чи іншої задачі треба ураховувати ті параметри, які закладені в теоремі.

Слід ураховувати, що в теоремах використовуються три міри механічного руху: кількість руху, момент кількості руху (кінетичний момент) і кінетична енергія. Кількість руху – це міра поступального руху тіла. Момент кількості руху або кінетичний момент є мірою обертального руху тіла.

Наведемо такий приклад.

Тіло масою  $M$  у формі однорідного круглого диску радіуса  $R$  обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  відносно нерухомої осі  $Cz$ , яка проходить через його центр мас перпендикулярно площині зображення (рис. 2.23)

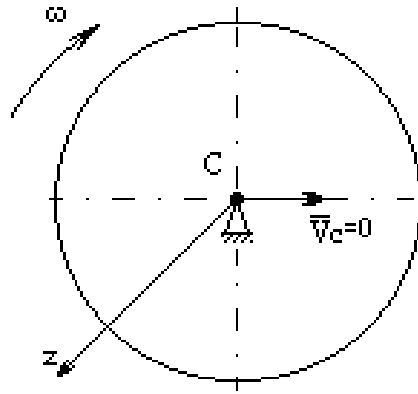


Рисунок 2.23

Кількість руху цього тіла  $\overline{Q} = M\overline{V}_C = 0$ , так як швидкість його центру мас, що знаходиться на нерухомій осі, дорівнює нулю, тобто  $\overline{V}_C = 0$ .

Таким чином, кількість руху не характеризує обертальний рух тіла, а є мірою тільки поступального руху.

Рух тіла в наведеному прикладі характеризує кінетичний момент  $K_{Cz} = J_{Cz}\omega$ , де  $J_{Cz}$  – момент інерції тіла, обчислюваний в даному

випадку за формулою  $J_{Cz} = \frac{1}{2}MR^2$ . Отже, кінетичний момент є мірою обертального руху тіла.

Кінетична енергія є універсальною мірою механічного руху, бо вона характеризує як поступальний, так і обертальний рухи.

Тому перші дві міри, а відповідно їм і теореми, використовують у менш складних задачах аналізу рухів механічних систем.

В основу вибору конкретної теореми, для розв'язання задачі, слід закладати принцип найменших затрат часу для отримання її невідомих.



## 2.6 Фізичні і математичні аналогії загальних теорем динаміки

### 2.6.1 Аналогії в поняттях і зв'язки між ними

#### 1 Момент інерції тіла відносно центра

$$I_0 = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2.$$

Момент інерції тіла відносно осі

$$I_z = \sum_{i=1}^N m_i h_i^2, \text{ де } h_i^2 = x_i^2 + y_i^2.$$

#### 2 Кінетичний момент точки відносно центра

$$\bar{k}_0 = \bar{r} \cdot m \bar{V}.$$

Векторний момент сили відносно центра

$$\bar{m}_0 = \bar{r} \cdot \bar{F}$$

#### 3 Кінетичний момент точки відносно осі

$$k_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Момент сили відносно осі

$$M_z = xF_y - yF_x.$$

#### 4 Кінетичний момент системи відносно осі

$$K_z = \sum_{i=1}^N m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i).$$

Кінетичний момент системи відносно центра

$$\bar{K}_0 = \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \cdot m_i \bar{V}_i.$$

5 Кінетична енергія системи

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i V_i^2.$$

Кількість руху механічної системи

$$\bar{Q} = \sum_{i=1}^N m_i \bar{V}_i.$$

Кінетичний момент механічної системи

$$\bar{K}_0 = \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \cdot m_i \bar{V}_i.$$

## 2.6.2 Аналогії у постановці задач

1 Теорема про зміну кінетичного моменту механічної системи відносно центра

$$\bar{K}_0 - \bar{K}_0^{(0)} = \sum_{i=1}^N \bar{m}_0 (\bar{S}_i^e).$$

Теорема про зміну кількості руху механічної системи

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum_{i=1}^N \bar{S}_i^e.$$

Теорема про зміну кінетичної енергії системи твердих тіл

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^N A_i^e.$$

2 Швидкість зміни кінетичного моменту механічної системи

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{M}_0.$$

Швидкість зміни кількості руху механічної системи

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}.$$

Швидкість зміни кінетичної енергії механічної системи

$$\frac{dT}{dt} = W.$$

3 Кінетична енергія при плоско-паралельному руху тіла складається із двох частин.

Плоско-паралельний рух тіла складається із поступового та обертального рухів.

### 2.6.3 Аналогії у діях

1 Правило обчислення кінетичного моменту точки відносно осі.

Правило обчислення моменту сили відносно осі.

2 Спосіб розв'язання основної задачі динаміки поступального руху тіла.

Спосіб розв'язання основної задачі динаміки обертального руху тіла відносно нерухомої осі.

## 2.6.4 Аналогії у результатах

1 Теорема про зміну кінетичного моменту системи відносно центра.

Теорема про зміну кількості руху механічної системи.

2 Наслідок із теореми про зміну кінетичного моменту системи відносно центра.

Наслідок із теореми кількості руху механічної системи.

3 Теорема про зміну кінетичного моменту відносно центра.

Теорема про зміну кінетичного моменту відносно осі.

4 Наслідок із теореми про зміну кінетичного моменту відносно центра.

Наслідок із теореми про зміну кінетичного моменту відносно осі.

5 Теорема про зміну кількості руху точки.

Теорема про зміну кінетичного моменту точки відносно центра.

6 Теорема про зміну кінетичного моменту точки відносно центра.

Теорема про зміну кінетичного моменту механічної системи відносно центра.

7 Закон збереження кінетичного моменту точки відносно центра.

Закон збереження кінетичного моменту механічної системи відносно центра.

8 Теорема про зміну кінетичного моменту системи відносно осі.

Теорема про зміну кінетичного моменту точки відносно осі.

9 Теорема про зміну кількості руху точки.

Теорема про зміну кількості руху механічної системи.

10 Закон збереження кількості руху точки.

Закон збереження кількості руху системи.

## 2.7 Індивідуальні завдання для самостійної роботи і контролю знань

### 2.7.1 Теорема про зміну кількості руху

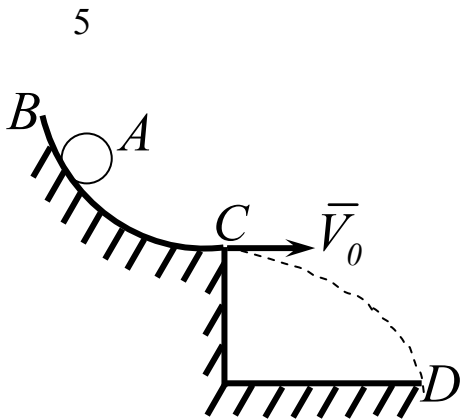
1 Хлопчик спускається на санках з гірки під кутом  $\alpha^\circ$  до горизонту без початкової швидкості. Коефіцієнт тертя санок об сніг дорівнює  $f$ .

Визначити швидкість санок через проміжок часу  $t = T$  сек.

2 Тіло  $A$  спускається по площині, нахиленій під кутом  $\alpha$  до горизонту. Через який час швидкість тіла збільшиться від  $V_1$  до  $V_2$ , якщо коефіцієнт тертя тіла об похилу площину дорівнює  $f$  ?

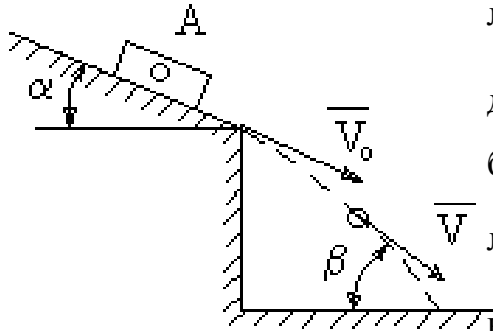
3 З якою початковою швидкістю було кинуто камінь під кутом  $\alpha$  до горизонту, якщо до падіння його на землю минуло  $t = T$  сек ? Чому дорівнює мінімальна швидкість каменя під час руху ? Опором повітря знехтувати.

4 Камінь кинуто вертикально вгору з початковою швидкістю  $V_0$ .  
Визначити час, протягом якого швидкість каменя за модулем зменшиться вдвоє. Через який час швидкість дорівнюватиме нулю? Опором повітря знехтувати.



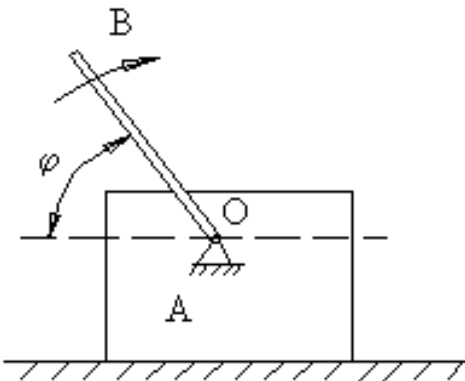
Тіло  $A$ , розмірами якого можна знехтувати, рухалось уздовж ділянки шляху  $BC$ ; в кінці цієї ділянки воно набуло горизонтальну швидкість  $V_0$ . Потім його рух за траєкторією  $CD$  був вільним протягом  $t = T$  сек. Визначити модуль і напрям швидкості тіла в кінці ділянки  $CD$ .

6



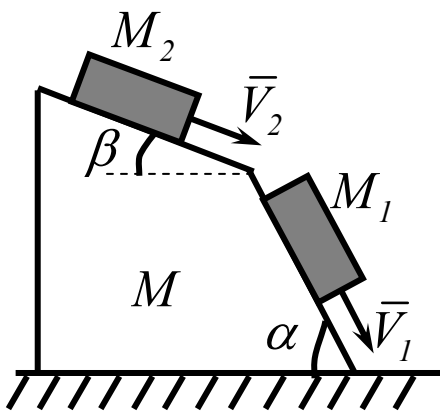
Тіло  $A$  ковзає вздовж площини, нахиленої під кутом  $\alpha^\circ$  до горизонту, потім падає з неї з швидкістю  $V_0$  і деякий час перебуває в стані вільного падіння. Визначити величину швидкості тіла  $V$  в момент, коли вона напрямлена під кутом  $\beta^\circ$  до горизонту, і час  $T$ , що минув до цього моменту.

7



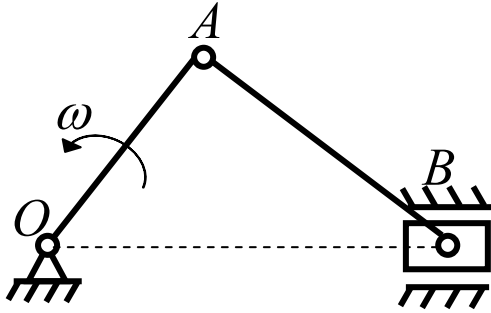
До бічної грані призми  $A$ , вага якої  $Q$ , прикріплений однорідний стрижень  $OB$  вагою  $P$  і довжиною  $l$ . Стрижень обертається навколо осі  $O$  з кутовою швидкістю  $\omega$ . Нехтуючи тертям призми об горизонтальну площину, визначити залежність її швидкості  $V$  від кута повороту  $\varphi$ .

8



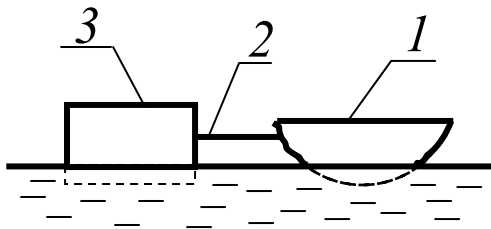
Уздовж граней призми  $M$  вагою  $P$  рухаються два тіла  $M_1$  і  $M_2$ , вага яких відповідно  $P_1$  і  $P_2$ , а швидкості відносно призми  $V_1$  і  $V_2$ . Нехтуючи тертям призми  $M$  об горизонтальну площину, визначити її швидкість. Уважати, що кути  $\alpha^\circ$  і  $\beta^\circ$  задані.

9

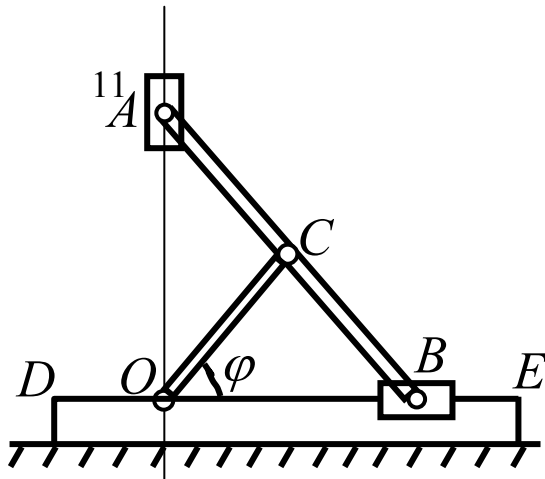


Кривошип  $OA$  вагою  $P_1$  і довжиною  $l$  обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі  $O$  і надає рух шатуну  $AB$  вагою  $P_2$  і повзуну  $B$  вагою  $P_3$ . Визначити кількість руху механізму у випадках, коли кривошип  $OA$ : 1) перпендикулярний до прямої  $OB$ , 2) напрямлений уздовж  $OB$ .

10



Моторний човен 1 вагою  $Q$ , рухаючись річкою, набуває сталої швидкості  $V_0$ . Після натягання каната 2 слідом за човном із стану спокою починає рухатися пліт 3 вагою  $P$ . Уважаючи, що рушійна сила і сила опору зрівноважуються, визначити швидкість  $V$ , з якою човен і пліт продовжують рухатися разом.

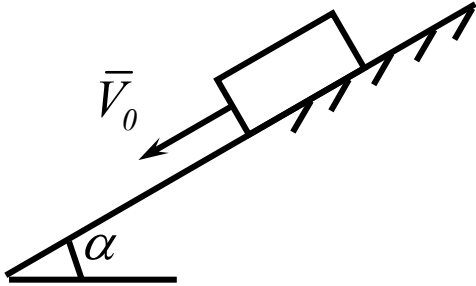


До підставки  $DE$  вагою  $P$ , розміщеної на гладенькій горизонтальній поверхні, жорстко прикріплений механізм еліпсографа. Вага кривошипа  $OC$  дорівнює  $P_1$ , а лінійки  $AB$  –  $2P_1$ . Кожний повзун  $A$  і  $B$  важить  $Q$ . Кривошип обертається з сталою кутовою швидкістю  $\omega$ . Визначити горизонтальну швидкість  $V$  підставки якщо  $OC = AC = BC = l$ .

12 Матеріальна точка масою  $m$  рухається за прямою. Визначити

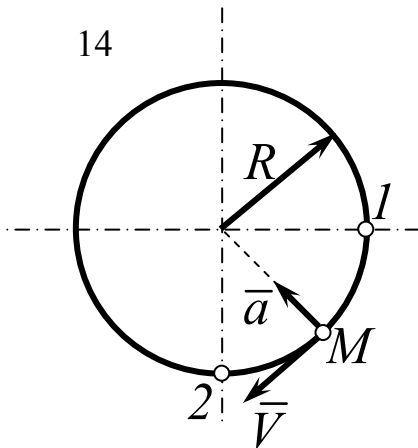
модуль імпульсу рівнодійної усіх сил, діючих на точку за перші  $T$  секунд, якщо вона рухається за законом  $S = 4t^3$ .

13



Тіло, якому надали початкову швидкість  $V_0$ , ковзає по гладкій нахиленій під кутом  $\alpha^\circ$  поверхні. Визначити через який час  $T$  швидкість тіла буде чисельно дорівнювати  $g$  (прискоренню земного тяжіння).

14



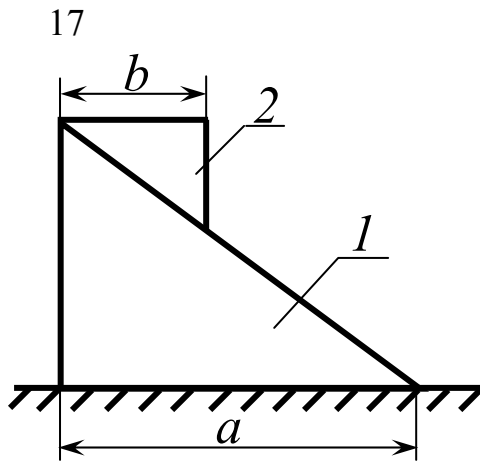
Матеріальна точка  $M$  масою  $m$  рівномірно рухається по колу радіуса  $R$  з швидкістю  $\bar{V}$ . Прискорення точки  $\bar{a}$ . Визначити модуль імпульсу рівнодійної усіх сил, діючих на точку за час її руху із положення 1 в положення 2.

15 Локомотив рухається по горизонтальній прямій ділянці шляху. При гальмуванні розвивається сила опору, яка дорівнює  $0,2$  ваги поїзда. Через який час  $T$  локомотив зупиниться, якщо його початкова швидкість дорівнює  $V_0$ .

16 Модуль вектора кількості руху механічної системи змінюється за

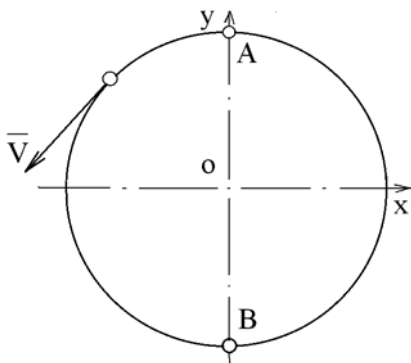


законом  $Q = 4t^2$ . Визначити модуль головного вектора зовнішніх сил, що діють на систему в момент часу  $T$ , якщо вектор кількості руху й головний вектор зовнішніх сил паралельні.



На однорідну призму 1, розміщену на горизонтальній площині, покладена однорідна призма 2. Визначити переміщення призми 1, коли призма 2, спускаючись по бічній поверхні призми 1, дійде до горизонтальної площини, якщо вага призми 1 втричі більше ваги призми 2. Поверхні призм і горизонтальної площини є ідеально гладкі.

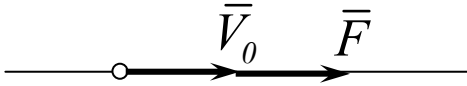
18



Матеріальна точка масою  $m$  рухається по колу з сталою швидкістю  $\bar{V}$ . Знайти проекцію на вісь  $Ox$  імпульсу рівнодійної усіх сил, діючих на точку, за час її руху із положення  $A$  у положення  $B$ .

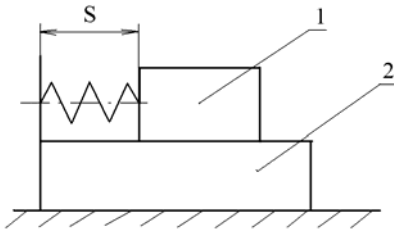
19 Граната вагою  $P$  і швидкістю  $V_0$ , розірвалася у повітрі на дві частини. Швидкість осколка вагою  $P_1$  в напрямку руху склала  $V_1$ . Знайти швидкість другої частини гранати  $V_2$ .

20



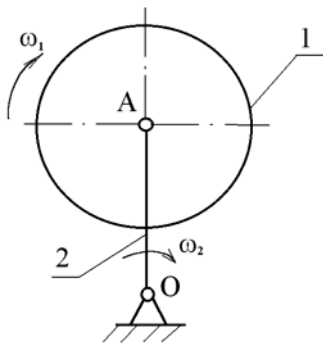
На матеріальну точку масою  $m$  діє сила сталого напрямку  $\vec{F}$ , яка змінюється за законом  $F = b \cos(\pi t)$ . Визначити швидкість точки в момент часу  $t = T_0$ , якщо її початкова швидкість дорівнює  $V_0$ .

21



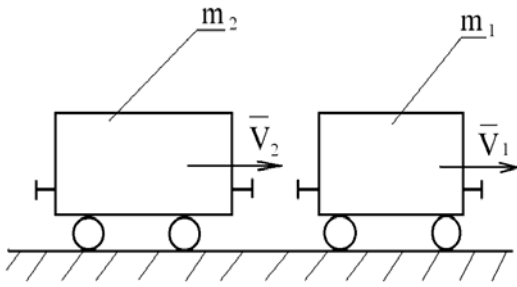
Тіло 1 масою  $m_1$  під дією пружини рухається відносно тіла 2 масою  $m_2$  за законом  $s = a + b \cos \pi t$ . Тіло 2 має можливість ковзати по горизонтальній поверхні. Визначити швидкість тіла в момент часу  $t = T$  сек, якщо воно почало рухатись із стану спокою.

22



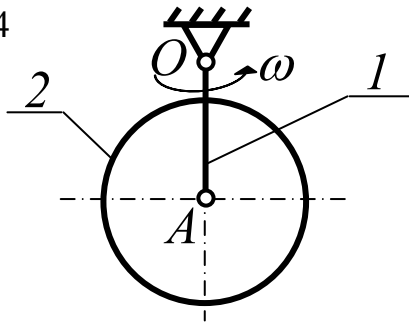
Кривошип 2 довжиною  $OA = l$  обертається з кутовою швидкістю  $\omega_2$ . Відносно кривошипа обертається однорідний диск 1 масою  $m_1$  з кутовою швидкістю  $\omega_1$ . Визначити модуль кількості руху системи, вважаючи кривошип 2 однорідним стрижнем масою  $m_2$ .

23



По горизонтальній ділянці шляху рухаються два вагона, маси яких  $m_1$  і  $m_2$ , а швидкості  $\bar{V}_1$  і  $\bar{V}_2$ . Другий вагон доганяє перший і зчіплюється з ним. Нехтуючи опором руху, визначити швидкість вагонів після зчеплення.

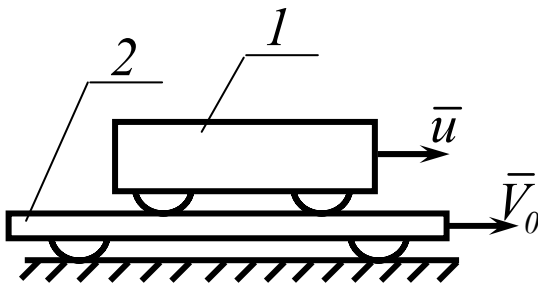
24



Маятник містить стрижень 1 вагою  $P_1$  довжиною  $l$  і однорідний диск 2 вагою  $P_2$  і радіуса  $R$ . Визначити головний вектор кількості руху маятника.

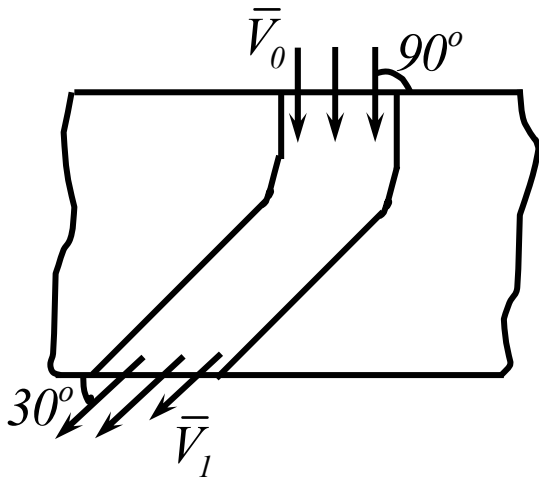
25 Ствол гармати важить  $Q$ . Вага снаряда дорівнює  $P$ . Швидкість снаряда біля дульного зрізу  $V_0$ . Визначити швидкість вільного відкоту ствола гармати в момент вильоту снаряду.

26



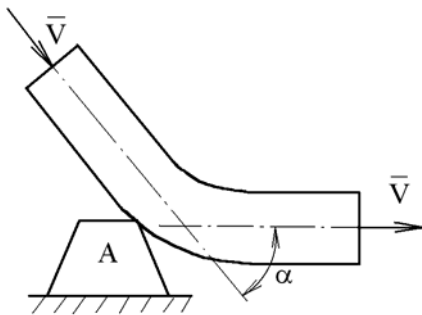
По горизонтальній платформі 1, яка рухається за інерцією з швидкістю  $V_0$ , переміщується візок 2 з сталою відносною швидкістю  $u$ . У деякий момент часу візок загальмовано. Визначити загальну швидкість  $V$  платформи з візком, якщо  $m_2$  – маса платформи, а  $m_1$  – маса візка.

27



Вода входить в нерухомий канал змінно-го перетину, симетричний відносно вертикальної площини зі швидкістю  $\bar{V}_0$  під кутом  $\alpha = 90^\circ$  до горизонту; перетин каналу на вході  $\sigma_0$ ; швидкість води біля виходу з каналу  $\bar{V}_1$  напрямлена під кутом  $\alpha_1 = 30^\circ$  до горизонту. Визначити модуль горизонтальної складової сили, з якою вода діє на стінки каналу.

28



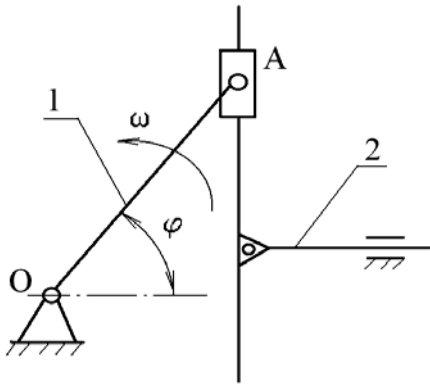
Визначити тиск на опору  $A$  коліна труби діаметром  $d$ , який виникає від руху води. Вісь труби розташована в горизонтальній площині. По трубі тече вода з швидкістю  $V$ . Швидкість води при вході в трубу утворює кут  $\alpha$  з її швидкістю при виході з труби.

29 Залізничний потяг рухається по горизонтальній прямолінійній колії; при його гальмуванні розвивається сила опору, яка дорівнює 0,1 ваги потяга. У момент початку гальмування швидкість потяга дорівнює  $V_0$ . Знайти час гальмування і гальмівний шлях.

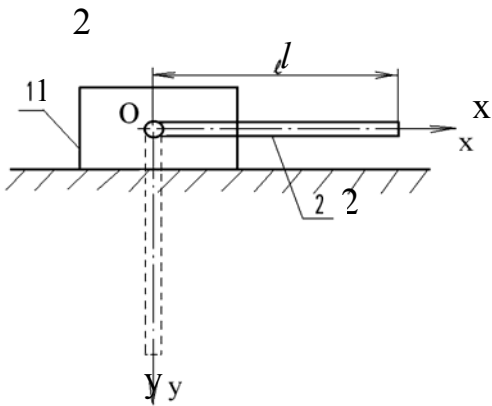
30 Який повинен бути коефіцієнт тертя  $f$  коліс загальмованого автомобіля об дорогу, якщо при швидкості їзди  $V$  він зупинився через  $T$  сек. після початку гальмування.

## 2.7.2 Теорема про рух центра мас

1

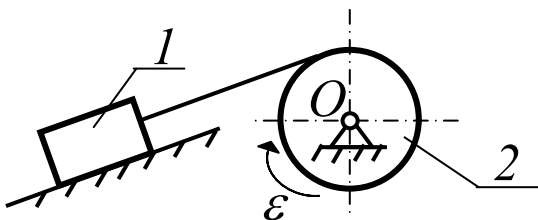


Кривошип 1 довжиною  $OA = l$ , обертаючись рівномірно з кутовою швидкістю  $\omega$ , надає руху кулі 2, маса якої  $m$ . Визначити модуль головного вектора зовнішніх сил, діючих на кулі в момент часу, коли кут між кривошипом і напрямом руху кулі дорівнює  $\varphi$ .



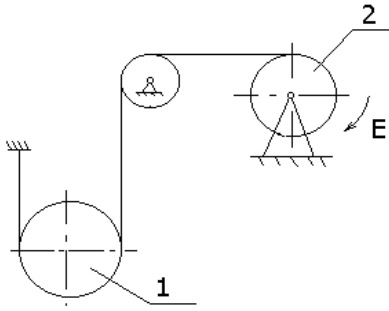
Тіло 1 масою  $m_1$  може рухатись по горизонтальній площині. На яку відстань зміститься тіло 1, коли однорідний стрижень масою  $m_2$  і довжиною  $l$ , опускаючись під дією сили ваги, займе вертикальне положення. У початковій момент система була нерухомою.

3



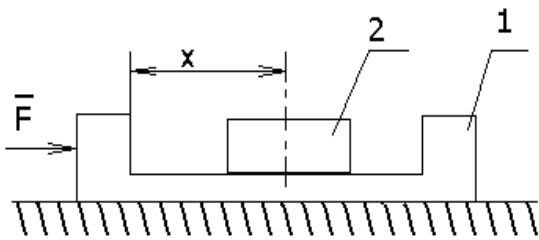
Тіло 1 масою  $m$  підіймається по нахиленій площині за допомогою троса, намотаного на барабан 2 радіуса  $R$ . Визначити модуль головного вектора зовнішніх сил, діючих на тіло 1, якщо кутове прискорення барабана дорівнює  $\varepsilon$ .

4



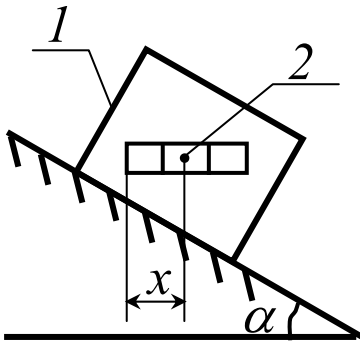
Шків радіуса  $R$ , обертаючись з кутовим прискоренням  $\varepsilon$ , підіймає однорідний циліндр 1, маса якого  $m$ . Визначити модуль головного вектора зовнішніх сил, діючих на циліндр.

5



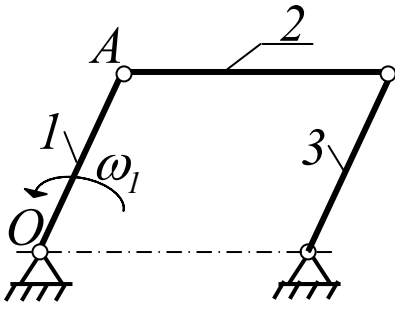
На тіло 1 діє стала сила  $\vec{F}$ .  
Визначити прискорення цього тіла в момент часу  $T$  сек., якщо відносно його під дією внутрішніх сил системи рухається тіло 2 відповідно рівнянню  $x = \cos \pi t$ . Маси тіл:  $m_1$  і  $m_2$ . Тіла рухаються поступально.

6

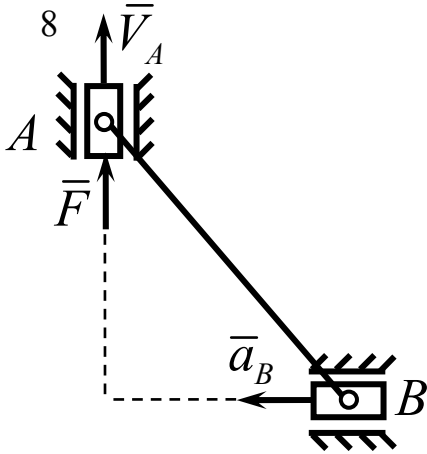


Визначити прискорення тіла 1, яке ковзає по гладенькій нахилій площині, якщо в горизонтальних напрямляючих відносно нього під дією внутрішніх сил рухається тіло 2 відповідно рівнянню  $x = t^2$ . Маси тіл  $m_1$  і  $m_2$  дорівнюють одна одній. Тіла рухаються поступально.

7

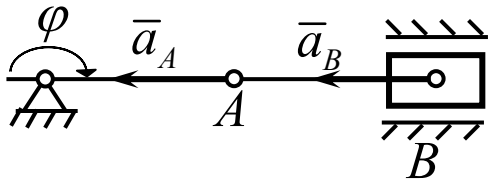


Кривошип 1 шарнірного паралелограма обертається рівномірно з кутовою швидкістю  $\omega$ . Визначити модуль головного вектора зовнішніх сил, діючих на ланку 2, якщо її маса  $m$ , довжина  $OA = l$ .



Повзун  $A$  рухається під дією сили  $\bar{F}$  зі сталою швидкістю  $\bar{V}_A$ . Визначити реакцію направляючої на повзун  $A$  в той момент часу, коли прискорення повзуна  $B$  дорівнює  $\bar{a}_B$ , якщо маса однорідного стержня  $AB$  дорівнює  $m$ . Масою повзунів знехтувати.

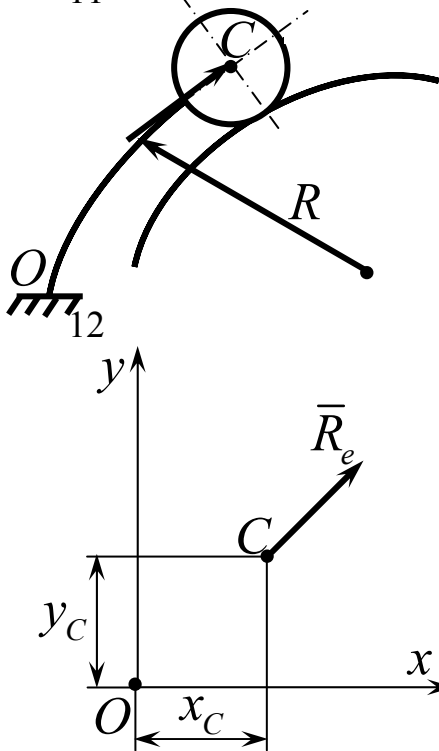
9



Визначити модуль головного вектора зовнішніх сил, діючих на шатун  $AB$  кривошипно-повзунного механізму в момент часу, коли  $\varphi = 180^\circ$ , а точки  $A$  і  $B$  мають відповідні прискорення  $\bar{a}_A$  і  $\bar{a}_B$ . Шатун маса якого дорівнює  $m$ , вважати однорідним стрижнем.

10 По горизонтальній товарній платформі довжиною  $l$  і вагою  $Q$ , яка знаходиться в початковий момент в стан спокою, двоє робочих перекочують важку сталю відливку з лівого кінця платформи в правий. В який бік і наскільки зміститься при цьому платформа, якщо загальна вага вантажу й робочих дорівнює  $P$ ? Силами опору платформи знехтувати.

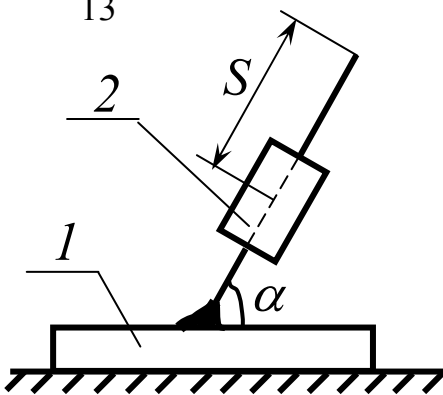
11



Центр мас колеса  $C$  рухається по колу радіуса  $R$  відповідно закону  $S = bt$ . Визначити модуль головного вектора зовнішніх сил, прикладених до колеса, якщо його маса дорівнює  $m$ .

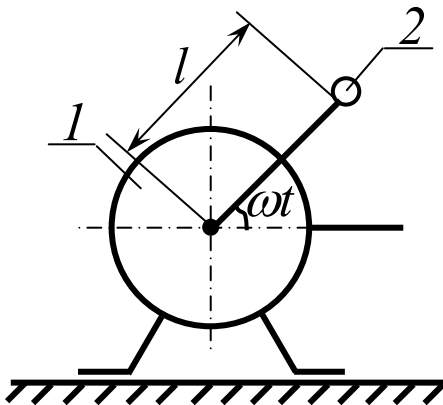
Визначити проекцію прискорення центра мас  $C$  механічної системи на ось  $Oy$  в момент часу, коли координата  $y_C = b$ , якщо маса системи дорівнює  $M$ , а головний вектор прикладених зовнішніх сил  $\bar{R}^e = c\bar{i} + d\bar{j}$ . У початковий момент часу центр мас системи знаходився в точці  $O$  в стані спокою.

13



Тіло 1 масою  $m_1$  може рухатися по горизонтальній площині. Визначити модуль прискорення тіла 1 в момент часу  $T$ , якщо відносно нього під дією внутрішніх сил системи рухається тіло 2 масою  $m_2$  відповідно рівнянню  $s = \sin bt$ .

14

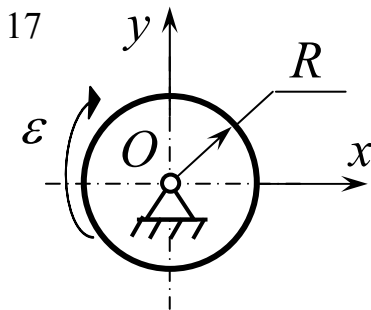


Електричний двигун 1 вагою  $Q$  встановлено без кріплення на гладкому горизонтальному фундаменті. На валу мотора під прямим кутом прикріплений одним кінцем невагомий стрижень довжиною  $l$ . На другий кінець стрижня насаджено вантаж вагою  $P$ . Кутова швидкість вала двигуна дорівнює  $\omega$ . Визначити закон руху двигуна.

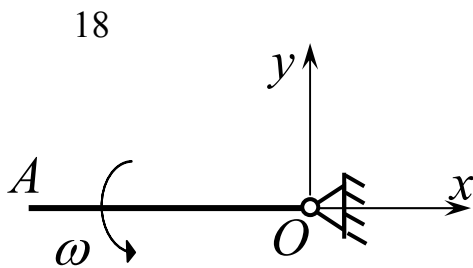


15 Ведуче колесо автомобіля котиться з ковзанням по горизонтальному шосе під дією прикладного до нього обертаючого моменту. Знайти закон руху центра мас  $C$  колеса, якщо коефіцієнт тертя ковзання дорівнює  $f$ . У початковий момент колесо знаходилось в стані спокою.

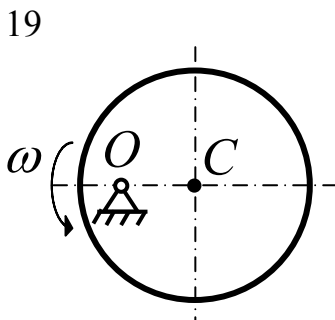
16 Ведене колесо автомобіля котиться з ковзанням по горизонтальному шосе під дією сили  $\bar{F}$ . Знайти закон руху центра мас  $C$  колеса, якщо коефіцієнт тертя ковзання дорівнює  $f$ , а  $\bar{F} = bfP$ , де  $P$  – вага колеса. У початковий момент колесо було нерухомим.



Однорідний диск радіуса  $R$  маса якого  $m$ , обертається з сталим кутовим прискоренням  $\varepsilon$ . Визначити модуль головного вектора зовнішніх сил, діючих на диск.

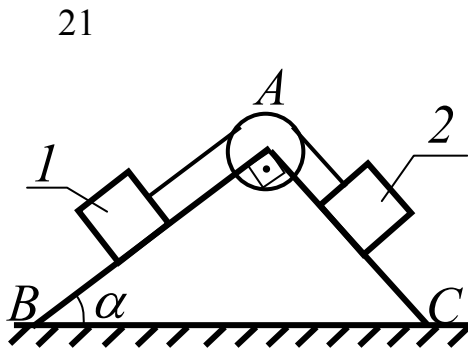


Однорідний стрижень  $OA$  масою  $m$  обертається рівномірно з кутовою швидкістю  $\omega$ . Визначити модуль головного вектора зовнішніх сил, діючих на стрижень, якщо його довжина  $OA = l$ .



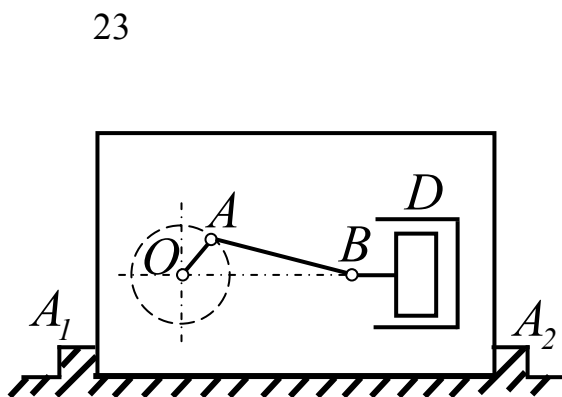
Диск масою  $m$  обертається рівномірно навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю  $\omega$ . Визначити модуль головного вектора зовнішніх сил, прикладених до диска, якщо його центр ваги знаходиться від осі оберту на відстані  $OC = l$ .

20 У човні вагою  $Q$  на спокійній воді почали одночасно переміщатися від лав до корми двоє людей вагою  $P_1$  і  $P_2$ . Їх переміщення відносно човна дорівнюють  $l_1$  і  $l_2$  відповідно. Нехтуючи опором води, визначити переміщення човна.



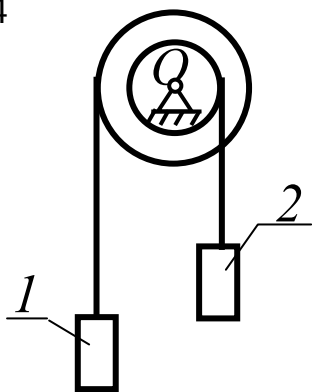
Вантажі 1 і 2 вагою  $P_1$  і  $P_2$  з'єднані нерозтяжною ниткою, перекинutoю через блок  $A$ , ковзають по гладким боковим сторонам прямокутного клина, обіпертого стороною  $BC$  на гладку горизонтальну площину. Знайти зміщення клина по горизонтальній площині при опусканні вантажу 1 на висоту  $h$ .

22 Людина вагою  $Q$  стоїть на горизонтальній підлозі і обертає у вертикальній площині з кутовою швидкістю  $\omega$  камінь вагою  $P$ , прив'язаний до вірвовки довжиною  $l$ . Нехтуючи вагою вірвовки, визначити максимальний і мінімальний тиск на підлогу.



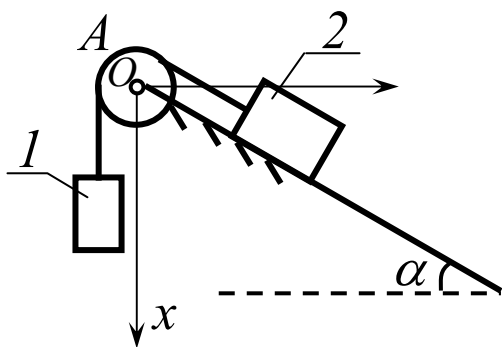
У горизонтальному двигуні вага кривошипа дорівнює  $P_1$ , вага шатуна  $AB$  –  $P_2$ , поршня  $BD$  –  $P_3$ ;  $OA = r$ ,  $AB = l$ . Кривошип  $OA$  обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ . Визначити горизонтальний тиск кожуха на упори  $A_1$  і  $A_2$  при правому горизонтальному положенні кривошипа  $OA$ .

24



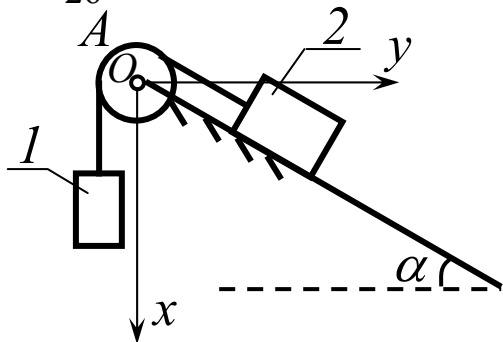
Однорідні блоки радіуса  $r$  і  $R$  жорстко скріплені між собою і насаджені на спільну горизонтальну вісь обертання  $O$ . Загальна вага блоків  $Q$ , вага вантажів 1 і 2,  $P_1$  і  $P_2$  відповідно. Прискорення вантажу 1 дорівнює  $a_1$ . Визначити тиск на вісь обертання  $O$ .

25



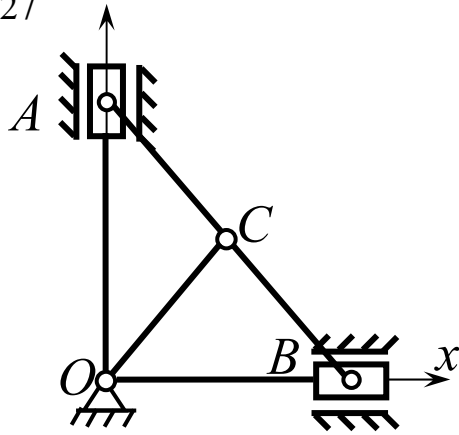
Вага блока  $A$  дорівнює  $Q$ , а вантажів 1 і 2 відповідно  $P_1$  і  $P_2$ . Прискорення вантажів дорівнює  $a$ , кут  $\alpha^\circ$  заданий. Нехтуючи тертям, визначити тиск на вісь обертання  $O$  блока за віссю  $Y$ .

26



Вага блока  $A$  дорівнює  $Q$ , а вантажів 1 і 2 відповідно  $P_1$  і  $P_2$ . Прискорення вантажів дорівнює  $a$ , кут  $\alpha^\circ$  заданий. Нехтуючи тертям, визначити тиск на вісь обертання  $O$  блока за віссю  $X$ .

27



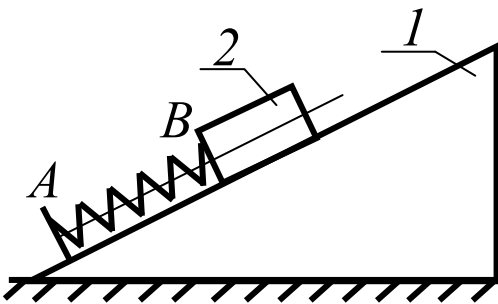
Визначити головний вектор зовнішніх сил, прикладених до лінійки  $AB$  еліпсографа. Кривошип  $OC$  обертається з сталою кутовою швидкістю  $\omega$ . Маса лінійки дорівнює  $m$ ;  $OC = AC = BC = l$ .

28 Визначити головний вектор зовнішніх сил, діючих на колесо масою  $m$ , яке котиться по нахиленій площині вниз, якщо його центр мас  $C$

рухається за законом  $x_C = \frac{at^2}{b}$ .

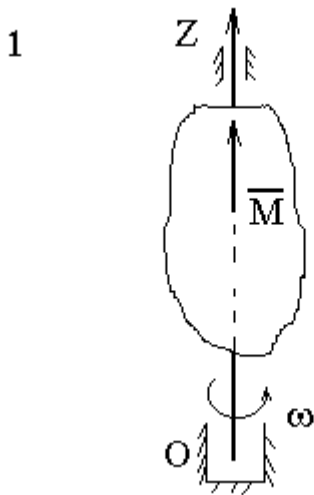
29 Однорідний стрижень  $AB$  довжиною  $l$  дотикається кінцем  $B$  до гладенької горизонтальної підлоги. Кінець  $A$  стрижня, піднятий на висоту  $h$  над підлогою, випускають із стану спокою, і стрижень падає на підлогу. На яку відстань переміститься при цьому кінець  $B$  стрижня.

30

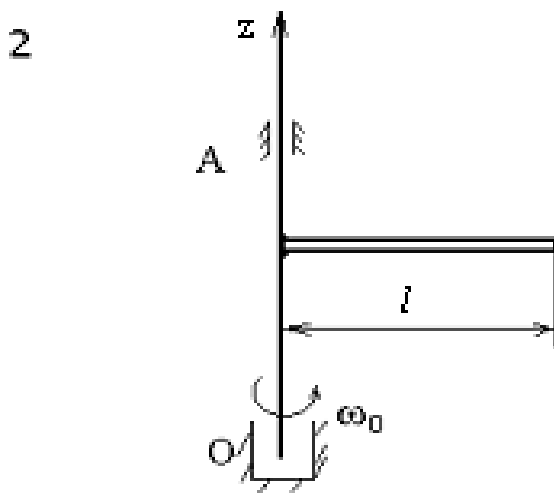


Клин 1, вагою  $Q$  встановлено на гладенькій горизонтальній площині. На похилій грані клина, нахилений під кутом  $\alpha$  до горизонту, розміщене підпружене тіло 2, вага якого  $P$ . В стані спокою клина пружину  $AB$  стиснули, а потім відпустили, після чого тіло 2 піднялось по похилій грані клина на відстань  $S$ . Визначити переміщення клина.

### 2.7.3 Теорема про зміну кінетичного моменту



Тіло обертається навколо вертикальної осі  $Z$  під дією пари сил з моментом  $M = at$ . Визначити момент інерції тіла відносно осі  $Z$ , якщо звісно, що в момент часу  $t = T$  кутова швидкість дорівнює  $\omega$ . При  $t = 0$  тіло знаходиться в стані спокою.



Однорідний стрижень масою  $m$  і довжиною  $l$  обертається відносно вертикальної осі  $Z$  з кутовою швидкістю  $\omega_0$ . До вала  $OA$  прикладений сталий момент сил опору. Знайти модуль цього моменту, якщо стрижень зупинився через час  $T$  після початку гальмування.

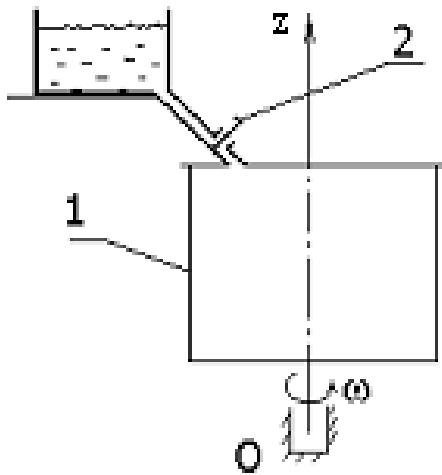
3 При виконанні сальто спортсмен у момент відриву від трампліна набирає кутову швидкість  $\omega_0$  навколо горизонтальної осі, яка проходить через його центр мас. При цьому момент інерції спортсмена відносно осі оберту дорівнює  $J_0$ . Знайти кутову швидкість спортсмена, коли він під час польоту, піджавши руки і ноги, зменшив момент інерції до  $J$ .

4 Натяг ведучої і веденої гілок ременя, який приводить до обертання шківів радіуса  $R$  і вагою  $P$  відповідно дорівнюють:  $T_1$  і  $T_2$ . Чому повинен бути дорівнювати момент сил опору для того, щоб шків обертався з прискоренням  $\varepsilon$ . Шків вважати однорідним диском.

5 Однорідний диск радіуса  $R$  і вагою  $P$  обертається навколо вертикальної осі  $Z$ , перпендикулярної до площини диска. Вісь проходить через точку  $A$  на ободі диска. Кутова швидкість його обертання  $\omega$ . Обчислити кінетичний момент диска відносно осі обертання.

6 Матеріальна точка масою  $m$  рухається за законом  $x = bt$ ,  $y = t^3$ ,  $z = t^4$ . Визначити момент рівнодіючої усіх прикладених до цієї точки сил відносно осі  $x$  в момент часу  $t = T$ .

7



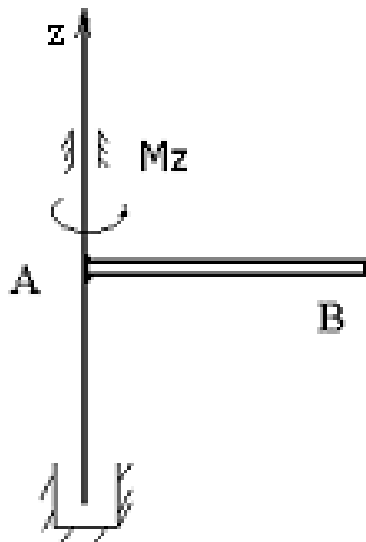
Резервуар 1, момент інерції якого відносно вертикальної осі  $Z$  дорівнює  $J_0$ , обертається з кутовою швидкістю  $\omega_0$ . Після відкриття заслінки 2 він заповнюється сипучим матеріалом. Знайти кутову швидкість заповненого резервуара, якщо його момент інерції дорівнює  $J$ .

8 Матеріальна точка масою  $m$  рухається за законом  $\vec{r} = a\vec{i} + (bt^2 + c)\vec{j}$ .

Визначити момент рівнодіючої усіх прикладених до цієї точки сил відносно початку координат.

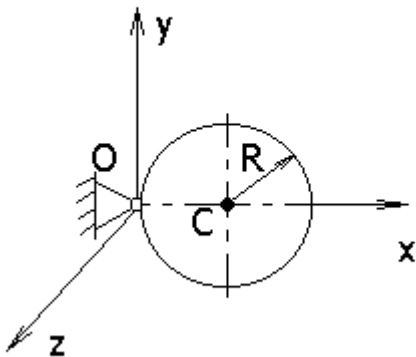
9 Тіло обертається навколо вертикальної осі  $Z$  під дією двох пар сил  $\vec{M}_1 = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$  і  $\vec{M}_2 = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$ . Момент інерції тіла відносно осі  $Z$  дорівнює  $J$ . Обчислити кутову швидкість тіла в момент часу  $t = T$ , якщо в початковий момент тіло не оберталося.

10



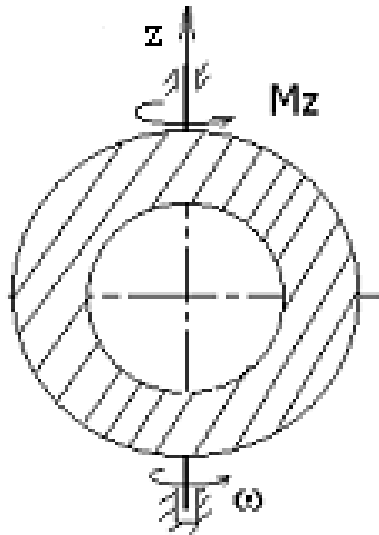
Однорідний стрижень  $AB = l$  обертається відносно осі  $Z$  із стану спокою під дією пари сил з моментом  $M_z = bt$ . Визначити в радіанах кут оберту стрижня в момент часу  $t = T$ , якщо його маса дорівнює  $m$ .

11



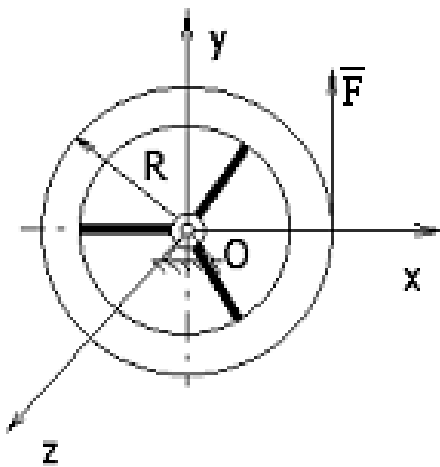
Однорідний диск радіуса  $R$  під дією сили ваги починає обертання в вертикальній площині навколо горизонтальної осі  $Z$  із стану, коли його радіус  $OC$  розташований горизонтально. У цей момент часу визначити кутове прискорення диска.

12



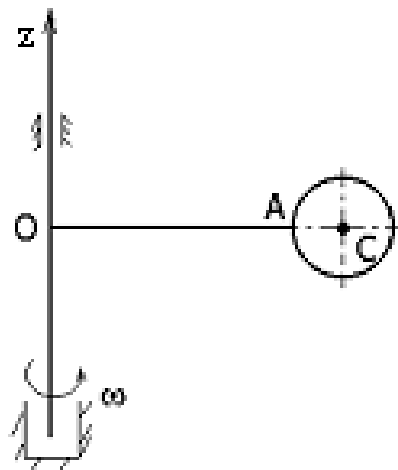
Визначити з якою кутовою швидкістю буде обертатись кільце з осьовим моментом  $J_z$  після прикладення моменту пари сил  $M_z = bt^2$  через  $t = T_c$ , якщо в початковий момент воно мало кутову швидкість  $\omega_0$ .

13



Визначити радіус інерції шківa, маса якого  $m$  і радіуса  $R$ , якщо під дією сили натягу троса  $F = bt$  він обертається навколо осі  $Z$  за законом  $\varphi = at^3$ .

14

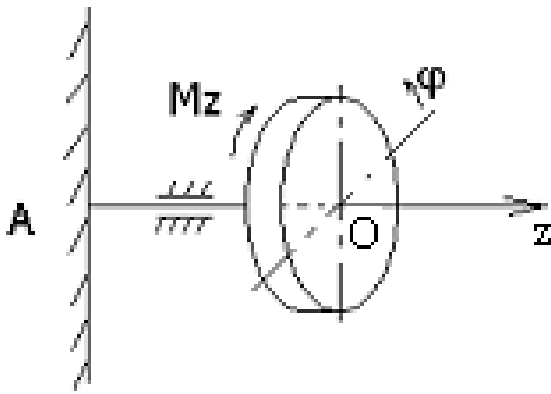


До однорідного тонкого, горизонтального стрижня  $OA$  довжиною  $l$  і вагою  $P$  прикріплено диск радіуса  $AC = R$  і вагою  $Q$  так, що площина диска вертикальна. Система обертається навколо вертикальної осі  $Z$  з кутовою швидкістю  $\omega$ .

Визначити кінетичний момент тіла відносно осі обертання  $Z$ .



15

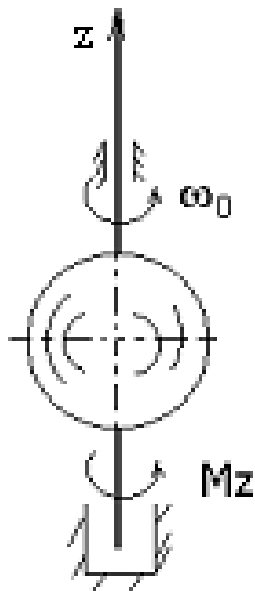


Визначити відносно осі  $Z$  момент інерції ротора, закріпленого на консолі  $AO$  і здійснюючого крутильні коливання за законом  $\varphi = a \sin\left(\frac{\pi}{b}t\right)$ .

Рух здійснюється під дією відновлюючого моменту

$$M_z = -\pi^2 \varphi.$$

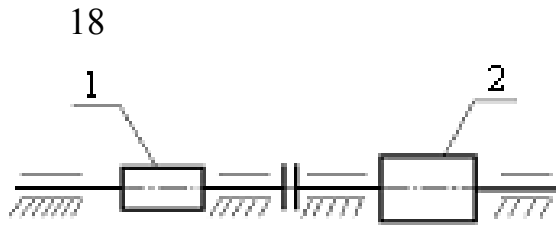
16



Однорідна куля з моментом інерції  $J_z$  обертається з кутовою швидкістю  $\omega_0$ . Визначити за який час під дією обертального моменту  $M_z$  кутова швидкість кулі подвоїться.

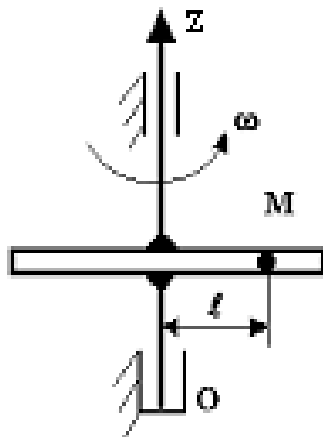
17 До ведучого вала приводу, що має приведений момент інерції  $J_z$ , від двигуна прикладено сталий момент  $M_1$  і від веденого вала – момент сил опору  $M_2 = -b\omega^2$ , де  $\omega$  – кутова швидкість ведучого вала

Визначити найбільшу кутову швидкість ведучого вала.



Вал 1, момент інерції якого відносно осі оберту  $J_1$ , обертається з кутовою швидкістю  $\omega_1$ . Вал 2 знаходиться в спокою. Знайти кутову швидкість валів після їх зчеплення, якщо момент інерції вала 2 відносно осі оберту дорівнює  $J_2$ .

19

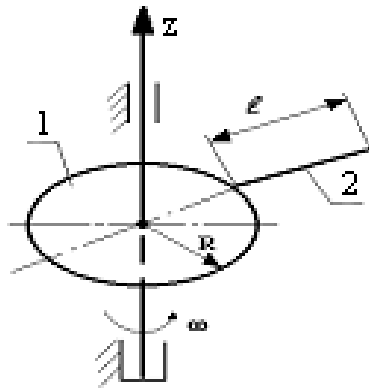


Трубка обертається навколо вертикальної осі  $Z$ , її момент інерції  $J_z$ . По трубці під дією внутрішніх сил системи рухається кулька  $M$  масою  $m$ . Коли кулька знаходиться на осі  $Z$ , кутова швидкість є  $\omega_0$ . При якій відстані  $l$  кутова швидкість стане рівною  $\omega_1$ ?

20 Для визначення моменту тертя в цапфах на вал насаджений маховик вагою  $P$ . Радіус інерції маховика  $\rho$ . Маховик має кутову швидкість  $n$  об/хв. Маховик зупиняється через  $t = T$  хв. Визначити момент тертя, вважаючи його сталим.

21 Визначити кутове прискорення ведучого колеса автомашини вагою  $P$  і радіуса  $R$ , якщо до колеса прикладений обертальний момент  $M$ . Момент інерції колеса відносно осі, що проходить через центр ваги  $C$  перпендикулярно до площини матеріальної симетрії, дорівнює  $J_c$ ;  $k$  – коефіцієнт тертя кочення,  $F$  – сила тертя.

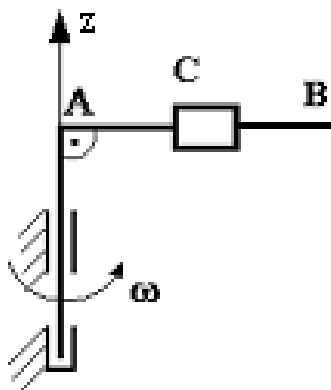
22



Однорідний диск 1 радіуса  $R$  і масою  $m_1$  з'єднаний з стрижнем 2 довжиною  $l$  і масою  $m_2$ . Система тіл починає обертатись під дією зовнішніх сил з кутовою швидкістю  $\omega = bt$ . Знайти момент зовнішніх сил відносно осі  $Z$ .

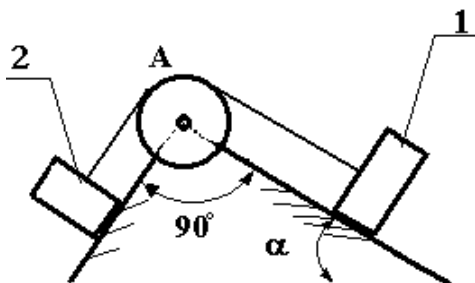
23 Однорідний диск радіусом  $R$  і вагою  $P$  обертається з кутовою швидкістю  $\omega_0$  навколо вертикальної осі  $Z$ , яка перпендикулярна до його площини і проходить через центр диска. До диска прикладений момент опору  $M = -\omega b$ , де  $\omega$  – кутова швидкість диска. Визначити через який час кутова швидкість диска зменшиться в  $n$  раз.

24



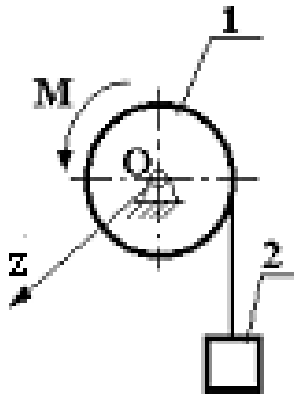
По стрижню  $AB$  рухається повзун  $C$  відповідно до закону  $AC = a + bt$ . Момент інерції вала  $OA$  зі стрижнем дорівнює  $J_z$ . Знайти кутову швидкість вала в момент часу  $t = T$ , якщо початкова кутова швидкість дорівнює  $\omega_0$ . Повзун вважати матеріальною точкою маси  $m$ .

25



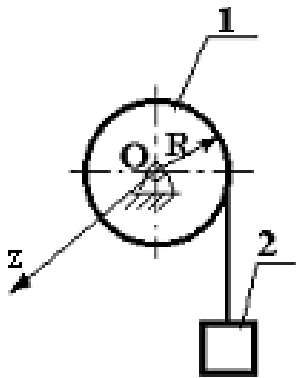
Через блок  $A$  вагою  $Q$  і радіусом  $R$  перекинута невагома нерозтяжна нитка, до кінців якої прикріплені вантажі 1 і 2 вагою  $P_1$  і  $P_2$  відповідно. Вантажі розміщені на площинах, нахилених до горизонту під кутами, позначеними на рисунку. Нехтуючи тертям і вважаючи блок однорідним диском, визначити прискорення вантажів.

26



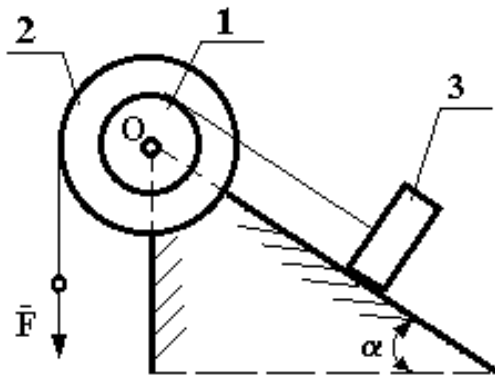
За допомогою однорідного циліндричного коловорота 1 вагою  $Q$  підіймають вантаж 2 вагою  $P$  під дією моменту  $M$  прикладеного до валу коловорота. Нехтуючи вагою вірьовки і тертям на валу, визначити прискорення вантажу 2.

27

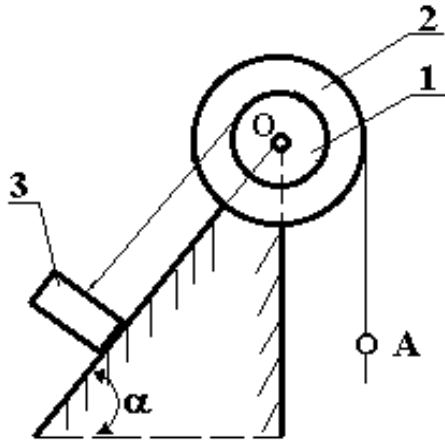


Вантаж 2 вагою  $P$ , падаючи прямовисно, приводить в обертання навколо горизонтальної осі  $Z$  однорідний циліндричний коловорот вагою  $Q$  і радіусом  $R$ . Нехтуючи вагою вірьовки і тертям на осі, визначити прискорення вантажу 2.

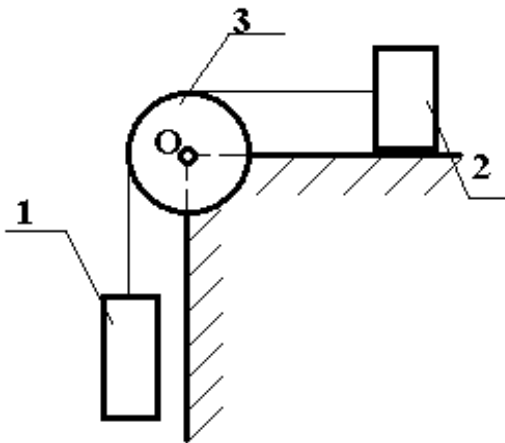
28



Два блоки вагою  $P_1$  і  $P_2$  радіусів  $r$  і  $R$  відповідно жорстко скріплені між собою і насаджені на спільну вісь  $O$ . На кожній з них намотано вірьовки. До кінця однієї прикріплено вантаж 3 вагою  $Q$ , розміщений на площині, нахилений під кутом  $\alpha^\circ$  до горизонту. До кінця другої прикладена сила  $\bar{F}$ . Нехтуючи тертям і вагою вірьовок, визначити кутове прискорення блоків, вважаючи їх однорідними дисками.



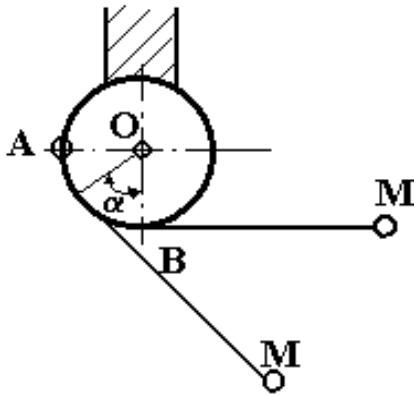
Два блоки вагою  $P_1$  і  $P_2$  радіусів  $r$  і  $R$  відповідно скріплені між собою і насаджені на спільну вісь. На кожний з них намотано вірвовки. До кінця однієї прикріплено вантаж 3 вагою  $Q$ , розміщений на площині, нахилений під кутом  $\alpha^\circ$  до горизонту. Вантаж 3 утримує людина, яка ухопилася за вірвовку в точці  $A$  і почала підніматися по ній вгору з швидкістю  $u$  відносно вірвовки. Визначити з якою швидкістю  $V$  при цьому рухається вантаж 3. Тертям знехтувати.



Вантажі 1 і 2 вагою  $P_1$  і  $P_2$  відповідно з'єднані між собою тросом, який обмотує однорідний циліндричний блок 3 вагою  $Q$  і радіуса  $R$ , насаджений на вісь  $O$ . Вантаж 1 рухається під дією сили ваги. Нехтуючи вагою троса, тертям на осі й на площині вантажу 2, визначити прискорення вантажів.

### 2.7.4 Теорема про зміну кінетичної енергії

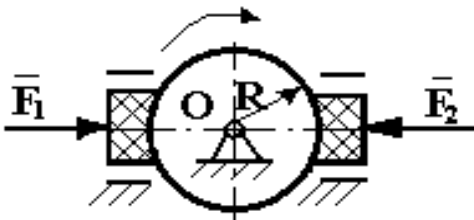
1



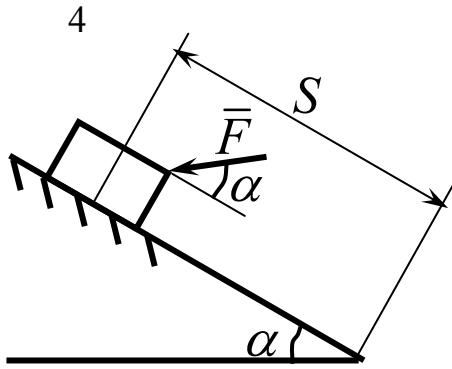
До кінця  $A$  горизонтального діаметра нерухомого циліндра, радіус якого  $R$ , прикріплена невагома нитка довжиною  $l$  з точковим вантажем  $M$  на кінці. Ниткою обхоплюють чверть дуги  $AB$  кола. Частину нитки, що залишилася, випрямляють у горизонтальному напрямі, і вантаж  $M$  відпускають без початкової швидкості. Визначити швидкість вантажу в момент, коли кут дорівнює  $\alpha$ .

2 Тіло  $A$  розміщене на шорсткій площині, нахиленій під кутом  $\alpha$  до горизонту. Йому надали швидкості  $V_0$ , напрямлену вгору по похилій площині. Визначити довжину шляху, пройденого тілом до зупинки. Коефіцієнт тертя тіла об похилу площину під час руху дорівнює  $f$ .

3

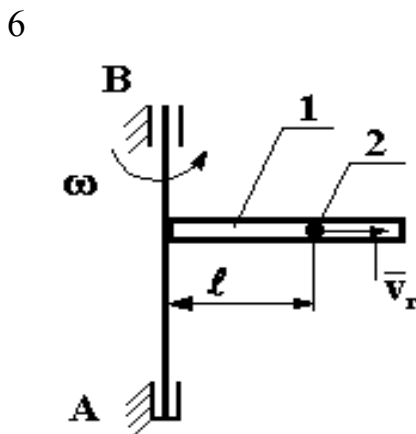


До диска, який обертається навколо осі  $O$ , притискаються дві гальмівні колодки з силами  $F_1 = F_2 = 100 \text{ H}$ . Визначити роботу сил тертя при гальмуванні диска радіуса  $R$  за  $N$  обертів. Коефіцієнт тертя ковзання гальмівної колодки об диск дорівнює  $f$ .

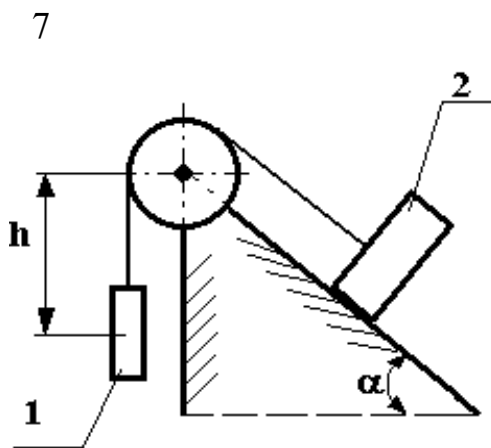


Визначити роботу, яку здійснює постійна сила  $\bar{F}$  при підйомі тіла на відстань  $S$  по гладенькій похилій площині.

5 Однорідний диск радіуса  $R$  може обертатись навколо горизонтальної осі, перпендикулярної до площини диска, яка проходить через точку його обода. Яку початкову кутову швидкість  $\omega_0$  необхідно надати диску, щоб він обернувся на четверть оберту.



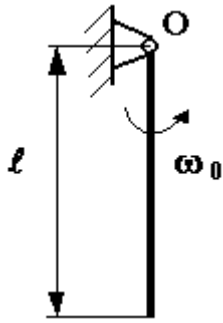
Трубка 1 обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі  $AB$ . У трубці рухається кулька 2 масою  $m$ . Визначити кінетичну енергію кульки в момент, коли вона, находячись на відстані  $l$  від осі, має відносну швидкість  $V_r$ .



Тіло 1 масою  $m_1$  спускається на відстань  $h$ , підіймаючи по похилій площині тіло 2 масою  $m_2$ . Знайти роботу, здійснену силами ваги на цьому зміщенні. Кут нахилу площини дорівнює  $\alpha$ .

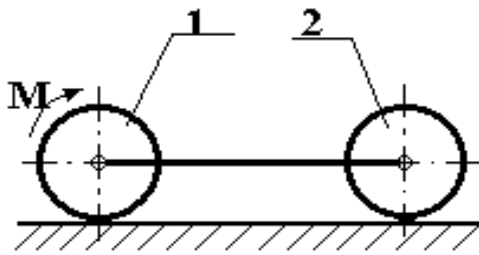
8 Тіло з вертикальною нерухомою віссю обертут надана кутова швидкість  $\omega_0$ . Момент інерції тіла відносно осі обертут  $J$ . На який кут обернеться тіло до зупинки, якщо на нього діє сталий момент тертя підшипників  $M$ .

9



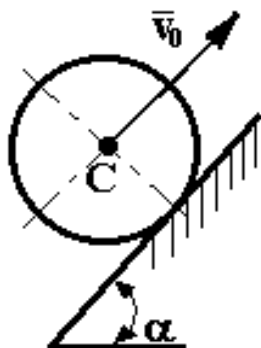
Яку початкову кутову швидкість  $\omega_0$  необхідно надати стрижню довжиною  $l$ , щоб він, обертаючись навколо горизонтальної осі  $O$ , зробив півобертут?

10



Однорідні циліндричні катки 1 і 2 масою  $m$  кожний з'єднанні стрижнем. Катку 1 надається рух з стану спокою сталим моментом пари сил  $M$ . Знайти швидкість осей котків при їх змищенні на відстань  $S$ , якщо радіуси катків  $R_1 = R_2 = R$ .

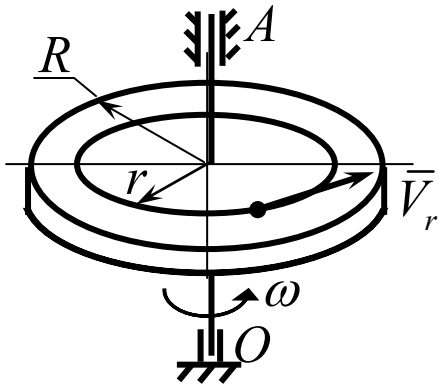
11



Однорідний диск масою  $m$  і радіуса  $R$  котиться без ковзання по похилій площині під кутом  $\alpha^\circ$  до горизонту вгору. У початковий момент часу швидкість центра диска  $\vec{v}_0$ . Визначити шлях, пройдений центром  $C$  диска до зупинки.

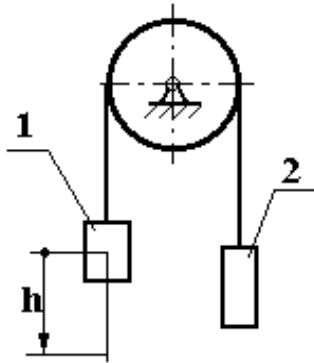


12



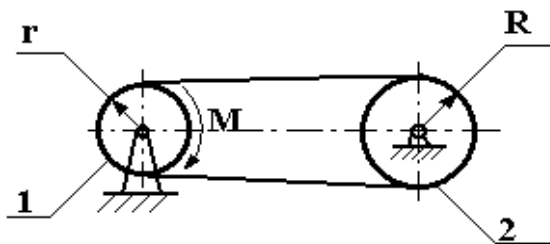
По горизонтальній платформі радіуса  $R$  і віссю обертання  $OA$  на сталій відстані  $r$  від осі рухається точка масою  $m$  з відносною швидкістю  $\vec{V}_r$ . Знайти кінетичну енергію системи, якщо платформа обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ .

13



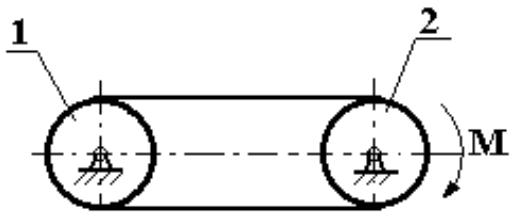
Вантажі 1 і 2 масою  $m_1$  і  $m_2$  підвішені до кінців гнучкої нитки, перекинutoї через блок. Визначити швидкість вантажу 1 в момент часу, коли він опустився на висоту  $h$ . Рух вантажів починається з стану спокою.

14



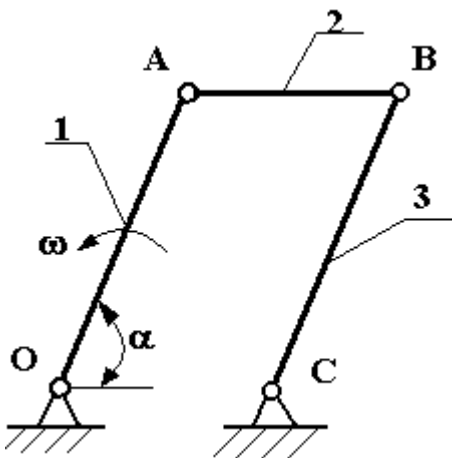
Ремінна передача починає рух з стану спокою під дією сталого моменту пари сил  $M$ . Моменти інерції шківів відносно їх осей обертання  $J_2 = 2J_1$ . Знайти кутову швидкість шківа 1 після трьох обертів, якщо радіуси шківів  $R_2 = 2R_1$ .

15



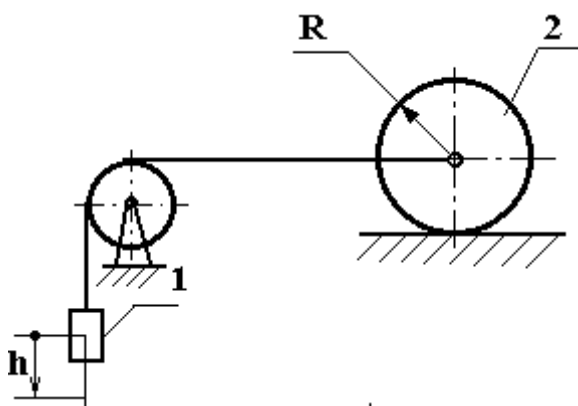
Рух шківа 2 ремінної передачі починається з стану спокою під дією сталого моменту  $M$ . Після трьох обертів однакові за масою і розмірами шківів 1 і 2 мають кутову швидкість  $\omega$ . Визначити момент інерції одного шківів відносно його осі обертання.

16



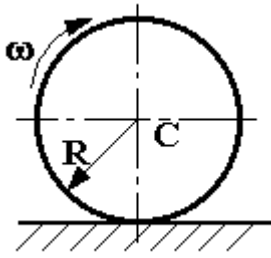
Кривошип 1 шарнірного паралелограма довжиною  $OA = l$  обертається рівномірно навколо осі  $O$  з кутовою швидкістю  $\omega$ . Моменти інерції кривошипів 1 і 3 відносно їх осей обертання дорівнюють  $J$ , маса шатуна 2 дорівнює  $m$ . Знайти кінетичну енергію механізму.

17



Вантаж 1 масою  $m_1$  надає руху котку 2 масою  $m_2$ . Коефіцієнт тертя кочення є  $k$ . Визначити роботу зовнішніх сил системи при опусканні вантажу 1 на висоту  $h$ , якщо радіус котка дорівнює  $R$ .

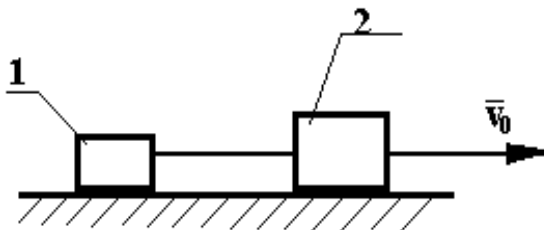
18



Тонкостінний циліндр масою  $m$  і радіуса  $R$  котиться без ковзання по горизонтальній площині. Визначити шлях, пройдений центром  $C$  циліндра до зупинки, якщо в початковий момент часу кутова швидкість циліндра  $\omega_0$ . Коефіцієнт тертя кочення  $k$ .

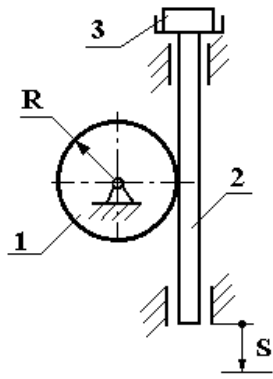
19 Ротору масою  $m$  і радіусом інерції  $\rho$  відносно осі обертання надана кутова швидкість  $\omega_0$ . Сам собою він зупинився, зробивши  $N$  обертів. Знайти момент тертя в підшипниках, вважаючи його сталим.

20



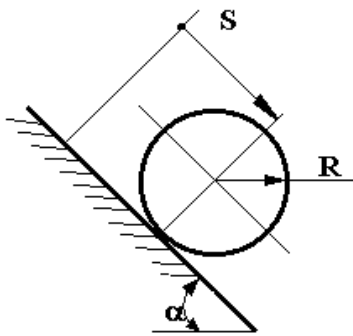
Вантажі 1 і 2 однакової маси  $m$ , з'єднані між собою гнучкою ниткою, рухаються по горизонтальній площині з початковою швидкістю  $V_0$ . Визначити коефіцієнт тертя ковзання, якщо тіла зупинилися, коли пройшли шлях, який дорівнює  $S$ .

21



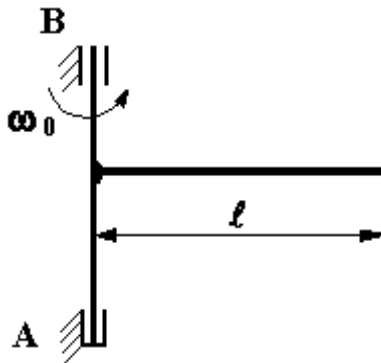
Момент інерції зубчатого колеса 1 відносно осі обертання дорівнює  $J$ . Загальна маса рейки 2 і вантажу 3 дорівнює  $m$ . Визначити швидкість рейки при її зміщенні на відстань  $S$ , якщо спочатку система знаходилась в спокої. Радіус колеса дорівнює  $R$ .

22



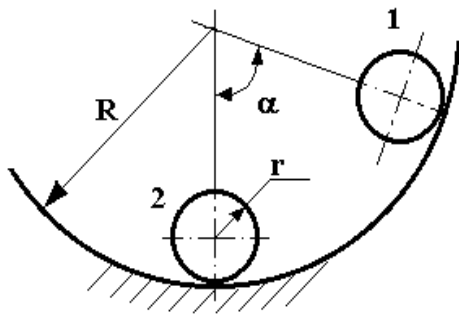
Циліндр, маса якого  $m$ , радіус  $R$  котиться без ковзання. Визначити загальну роботу сили ваги і сили опору коченню, якщо вісь циліндра змістилася на відстань  $S$  і коефіцієнт тертя кочення  $k$ .

23



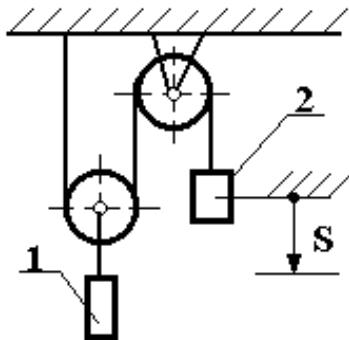
Вал  $AB$  жорстко з'єднаний із горизонтальним стрижнем довжиною  $l$  і масою  $m$ . Валу надана кутова швидкість  $\omega_0$ . Сам собою він зупинився зробивши  $N$  обертів. Визначити момент тертя в підшипниках, вважаючи його сталим.

24



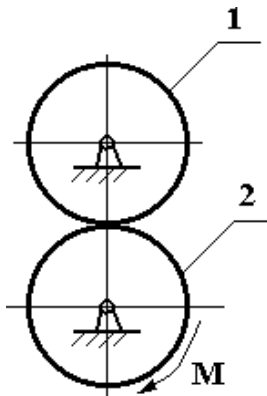
Тонке кільце радіуса  $r$  котиться без ковзання з положення 1, де воно знаходилось в стані спокою, по внутрішній поверхні горизонтального циліндра радіуса  $R$ . Визначити швидкість центра кільця в нижчому положенні 2.

25



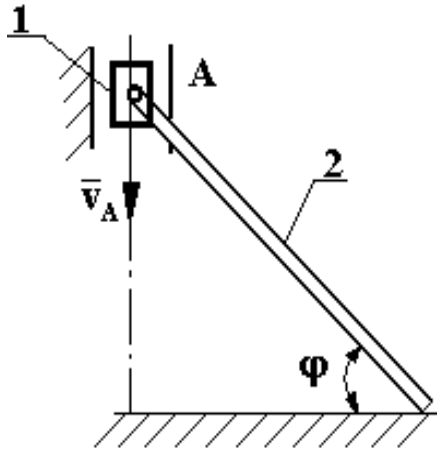
Визначити швидкість вантажу 2 в момент часу, коли він спуститься вниз на відстань  $S$ , якщо маси вантажів  $m_1$  і  $m_2$ . Система тіл спочатку знаходилась в спокої.

26



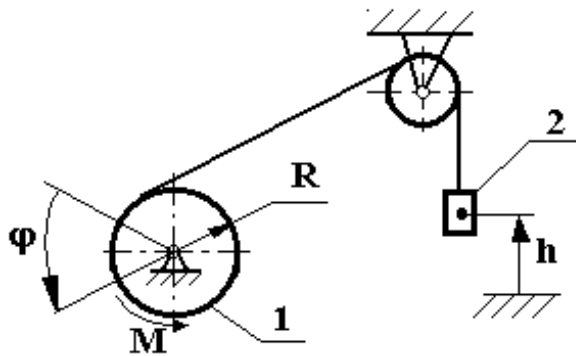
Однаковим зубчатим колесам 1 і 2 масою  $m$  надається рух з стану спокою сталим моментом пари сил  $M$ . Визначити кутову швидкість колес після  $N$  обертів, якщо радіус інерції кожного із тіл відносно осі обертання дорівнює  $J$ .

27

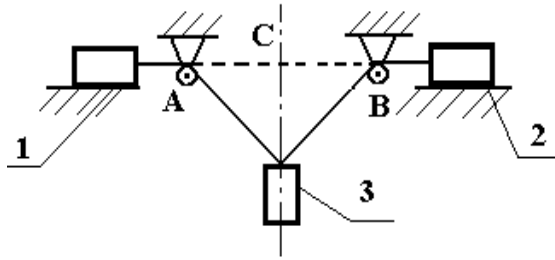


Повзун 1 масою  $m_1$ , з'єднаний шарніром з однорідним стрижнем 2 довжиною  $AB = l$  і масою  $m_2$ . Кінець  $B$  стрижня ковзає по горизонтальній площині. Визначити кінетичну енергію системи тіл, коли швидкість  $V_A = V$  і кут дорівнює  $\varphi$ .

28



На барабан 1, радіус якого  $R$ , діє пара сил з моментом  $M = A + \varphi^2$ . Визначити роботу, виконану парою сил і силою ваги вантажу 2, маса якого  $m$ , при підйомі вантажу на висоту  $h$ .



Вантаж 3 вагою  $Q$  з'єднано з вантажами 1 і 2 вагою  $P$  кожний невагомими нерозтяжними нитками, перекинутими через дуже малі блоки  $A$  і  $B$ . Точки прикріплення ниток до вантажу 3 у початковий момент були на одному рівні з осями блоків  $A$  і  $B$ . Потім вантаж 3 відпустили без початкової швидкості, після чого вантажі 1 і 2 почали рухатись по гладеньких горизонтальних площинах. Визначити швидкість вантажу 3 залежно від відстані  $h$ , на яку він опуститься, якщо  $AB = BC = a$ .

30 Маховик вагою  $Q$ , обертаючись рівномірно робить  $n$  об/хв. Діаметр вала дорівнює  $d$ , коефіцієнт тертя між валом і підшипником  $f$ . Визначити потужність, яку сприймає від двигуна маховик.

## Список використаної літератури

- 1 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики, – М.: Высш. шк., 1986. – 416 с.
- 2 Добронравов В.В. Курс теоретической механики/ В.В.Добронравов, Н.Н.Микитин. – М.: Высш. шк., 1983. – 575с.
- 3 Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1981. – 480 с.
- 4 Теоретична механіка: Конспект лекцій. Розділ III. Динаміка/ М.Г.Гонтар, А.В.Кузнецов, Н.М.Завражина. – Київ: КІБІ., 1993. – 320 с.
- 5 Збірник задач з теоретичної механіки/ О.А.Березова, З.В.Солодовников, Г.Ю. Друшляк. – Київ: Вища школа, 1975. – 323 с.
- 6 Тарг С. М. Теоретическая механика: Методические указания и контрольные задания. – М.: Высш. шк., 1989. – 110с.
- 7 Добронравов В.В. Основы аналитической механики. – М.: Высш. шк., 1976. – 263с.
- 8 Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. –М.: Высш. шк., 1966. – 300с.
- 9 Сборник задач по аналитической механике/ Е.Г.Пятницкий, Н.М.Трухан, Ю.И.Ханукаев, Г.Н.Яковенко. – М.: Наука, 1980. – 144с.
- 10 Веселовский И.Н. Очерки по истории механики. – М.: Высш. шк., 1974. – 286с.
- 11 Космодемьянский А.А. Теоретическая механика и современная техника. – М.: Просвещение, 1969. – 254с.



Навчальне видання

Сергій Володимирович Подлесний  
Володимир Григорович Федорченко  
В'ячеслав Михайлович Іскрицький  
Олександр Миколайович Стадник

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ  
З ДИСЦИПЛІНИ „ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА”  
РОЗДІЛ „ДИНАМІКА”

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Редактор

Ірина Іванівна Дьякова

Підп. до друку

Формат 60x84/16.

Ризограф. друк. Ум.друк. арк.

Обл.-вид. арк..

Тираж прим. Зам. №

---

ДДМА. 84313. м.Краматорськ, вул..Шкадінова, 72